

# Basiskennis voor technici

Eenheden en symbolen

Wiskunde

Natuurkunde

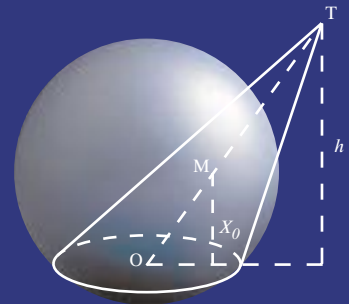
Scheikunde

Trefwoorden

Internetbronnen

PBNA

Help



# Eenheden en symbolen

---

## 1 **Overzicht eenheden**

- 1.1 Basisgrootheden en grondeenheden (SI)
- 1.2 Aanvullende grootheden en eenheden
- 1.3 Afgeleide SI-eenheden met eigen naam
- 1.4 Afgeleide grootheden en eenheden
- 1.5 Niet tot SI behorende eenheden
- 1.6 Berekening herleidingsfactoren
- 1.7 Decimale voorvoegsels (SI)
- 1.8 SI-symbolen (alfabetisch) met naam

## 2 **Romeinse cijfers**

## 3 **Griekse lettertekens**

# 1 Overzicht eenheden

## 1.1 Basisgrootheden en grondeenheden (SI)<sup>1)</sup>

*Lengte* (symbool  $l$ )

De **meter** (m) is de lengte van de weg die het licht in vacuüm aflegt gedurende een tijdinterval van  $1/299\,792\,458$  gedeelte van een seconde.

*Massa* (symbool  $m$ )

Het **kilogram** (kg) is de eenheid van massa; het is gelijk aan de massa van het internationale prototype van het kilogram.

*Tijd* (symbool  $t$ )

De **seconde** (s) is de tijdsduur van  $9\,192\,631\,770$  perioden van de straling overeenkomend met de overgang tussen de twee hyperfijn niveaus van de grondtoestand van het atoom cesium 133.

*Elektrische stroom* (symbool  $I$ )

De **ampère** (A) is de constante stroom die, indien hij wordt onderhouden in twee evenwijdige, rechtlijnige en oneindig lange geleiders van te verwaarlozen cirkelvormige doorsnede, welke geplaatst zijn in het luchtledige op een afstand van 1 meter, tussen deze twee geleiders een kracht veroorzaakt gelijk aan  $2 \times 10^{-7}$  newton voor iedere meter lengte.

*Thermodynamische temperatuur* (symbool  $T$ )

De **kelvin** (K) is gelijk aan het  $1/273,16$  gedeelte van de thermodynamische temperatuur van het tripelpunt van water.

*Hoeveelheid stof* (symbool  $n$ )

De **mol** (mol) is de hoeveelheid stof van een systeem dat evenveel elementaire entiteiten bevat als er atomen zijn in 0,012 kilogram koolstof 12.

<sup>1)</sup> SI: Système International.

Opmerking. Bij gebruikmaking van de mol moeten de elementaire entiteiten worden gespecificeerd; deze kunnen atomen, moleculen, ionen, elektronen, andere deeltjes of bepaalde groeperingen van dergelijke deeltjes zijn.

In de praktijk (*technische notatie*) wordt het gebruik van de **kilomol** (kmol) aanbevolen, o.a. door de *International Organization for Standardization* (ISO). Men vermijdt dan een factor 1000 die optreedt wanneer men de mol in combinatie met andere grootheden gebruikt.

Bijv.:  $M = 10^{-3} M_r$  kg/mol, resp.  $M = M_r$  kg/kmol.

Met de mol als uitgangspunt zouden pH-waarden 3 kleiner worden dan wanneer de kmol als uitgangspunt wordt gehanteerd.

*Lichtsterkte* (symbool  $I$ )

De **candela**<sup>1)</sup> (cd) is de lichtsterkte, in een bepaalde richting, van een bron die monochromatische straling uitzendt van een frequentie van  $540 \times 10^{12}$  Hz en een stralingssterkte in die richting heeft van 1/683 watt per steradiaal.

## 1.2 *Aanvullende grootheden en eenheden*

*(Vlakke) hoek* (symbool  $\alpha, \beta, \dots$ )

De **radiaal** (rad) is de vlakke hoek tussen twee stralen van een cirkel, die op de omtrek een boog afsnijden waarvan de lengte gelijk is aan de straal.

$2\pi$  rad  $\cong$   $360^\circ$ .

*Ruimtehoek* (symbool  $\Omega, \omega$ )

De **steradiaal** (sr) is de ruimtehoek die, wanneer zijn top samenvalt met het middelpunt van een bol, op die bol een oppervlak uitsnijdt gelijk aan die van een vierkant met de straal van de bol als zijde.

De totale *driedimensionale ruimte* omvat  $4\pi$  sr.

<sup>1)</sup> Uitspraak: kandéela.

## 1.3 Afgeleide SI-eenheden met eigen naam

Tabel 1.0 Overzicht afgeleide SI-eenheden met eigen naam

eenheid			grootheid
naam	symbool	afleiding	
becquerel <sup>1)</sup>	Bq	$s^{-1}$	(Radio)activiteit
coulomb <sup>2)</sup>	C	$A \cdot s$	Elektrische lading
farad <sup>3)</sup>	F	$A^2 \cdot s^4 / (kg \cdot m^2)$	Elektrische capaciteit
gray <sup>4)</sup>	Gy	$m^2/s^2$	Geabsorbeerde dosis
henry <sup>5)</sup>	H	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^2)$	Elektrische inductantie
hertz	Hz	$s^{-1}$	Frequentie
joule <sup>6)</sup>	J	$kg \cdot m^2/s^2$	Arbeid, energie, hoeveelheid warmte
lumen	Lm	$cd \cdot sr$	Lichtstroom
lux	lx	$cd \cdot sr/m^2$	Verlichtingssterkte
newton <sup>7)</sup>	N	$kg \cdot m/s^2$	Kracht
pascal	Pa	$kg/(m \cdot s^2)$	Druk, spanning
siemens	S	$A^2 \cdot s^3 / (kg \cdot m^2)$	Elektrische geleiding
sievert	Sv	$m^2/s^2$	Dosis equivalent
tesla	T	$kg/(A \cdot s^2)$	Magnetische inductie
volt	V	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)$	Elektrische spanning, potentiaal
watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	Vermogen, energiestroom
weber	Wb	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^2)$	Magnetische flux
ohm	$\Omega$	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^3)$	Elektrische weerstand
bel	B	$\log(P_2/P_1)$	Briggse logaritme van verhouding
neper	Np	$\ln(A_2/A_1)$	Natuurlijke logaritme van verhouding

**Uitspraak:**    <sup>1)</sup> bekkèrèl    <sup>3)</sup> fárat    <sup>5)</sup> hènri    <sup>7)</sup> njòèton  
                  <sup>2)</sup> koeloni    <sup>4)</sup> grei (zachte k)    <sup>6)</sup> dzjoel

## 1.4 Afgeleide grootheden en eenheden

De gegeven eenheid is de meest gangbare voor de betreffende grootheid. De grootte van deze eenheid wordt uitgedrukt in grondeenheden (zie tabel 1.1 t/m 1.10). Zie voor een alfabetische lijst van SI-symbolen, par. 1.8.

*Tabel 1.1 Ruimte, tijd en periodieke verschijnselen*

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Breedte	$b$	m	
Cirkelfrequentie	$\omega$	rad/s	
Cirkelrepetentie	$k$	$m^{-1}$	
Compressibiliteit	$\kappa$	$\text{Pa}^{-1}$	$m \cdot s^2 / \text{kg}$
Decrescentie (dempingscoëff.)	$\delta$	$s^{-1}$	
Diameter	$D, d$	m	
Dikte	$d, \delta$	m	
Fase, faseverschil	$\varphi$	rad	
Fasecoëfficiënt	$\beta$	$m^{-1}$	
Frequentie	$f, \nu$	Hz	$s^{-1}$
Golfgetal = repetentie	$\sigma$	$m^{-1}$	
Golflengte	$\lambda$	m	
Hoek, vlakke –	$\alpha, \beta, \gamma, \varphi$	rad	
Hoeksnelheid	$\omega$	rad/s	
Hoekversnelling	$\alpha$	$\text{rad}/s^2$	
Hoogte	$h$	m	
Inhoud	$V$	$m^3$	
Lengte	$l$	m	
Oppervlakte	$A$	$m^2$	
Periode	$T$	s	
Pulsatie = cirkelfrequentie	$\omega$	$s^{-1}$	
Repetentie = golfgetal	$\sigma$	$m^{-1}$	
Rotatiefrequentie	$n$	$s^{-1}$	
Ruimtehoek	$\Omega, \omega$	sr	
Snelheid	$u, v, w, c$	m/s	
Straal	$R, r$	m	
Tijd	$t$	s	
Tijdconstante	$\tau$	s	
Versnelling	$a$	$m/s^2$	
Versnelling van de vrije val	$g$	$m/s^2$	
Verzwakkingscoëfficiënt	$\alpha$	$m^{-1}$	
Volume	$V$	$m^3$	
Volumestroom	$q_V, \dot{V}$	$m^3/s$	
Volumestroom-dichtheid	$v$	m/s	
Voortplantingscoëfficiënt	$\gamma$	$m^{-1}$	
Weglengte	$s$	m	

*Tabel 1.2 Mechanica algemeen*

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Aanzwengeling (draaistoot)	$D$	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
Arbeid	$W, A$	J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Areïeke massa	$\rho_A$	$\text{kg}/\text{m}^2$	
Dichtheid	$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	
Draaistoot	$D$	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
Druk	$p$	Pa	$\text{N}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Energie	$E(W, U)$	J	$\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Energiedichtheid	$w$	$\text{J}/\text{m}^3$	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Energiestroom = vermogen	$P$	W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Gewicht	$G$	N	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Gravitatieveldsterkte	$\gamma$	$\text{N}/\text{kg}$	$\text{m}/\text{s}^2$
Hoeveelheid van beweging	$p$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$	
Hoeveelheid van draaiing	$L$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$	
Impuls (stoot)	$I$	$\text{N} \cdot \text{s}$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$
Impulsmoment (hoev. draaiing)	$L$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$	
Kinetische energie	$E_k$	J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Koppel	$T$	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Kracht	$F$	N	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Lineïeke massa	$\rho_l$	$\text{kg}/\text{m}$	
Massa	$m$	kg	
Massastroom	$q_m, \dot{m}$	$\text{kg}/\text{s}$	
Massastroomdichtheid	$\Phi$	$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$	
Moment van koppel	$T$	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Moment van een kracht	$M(T)$	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Moment van lengte	$m$	N	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Normaalspanning	$\sigma$	Pa	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Potentiële energie	$E_p$	J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Relatieve dichtheid	$d, \rho_v$	–	
Schuifspanning	$\tau$	$\text{N}/\text{m}^2$	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Soortelijke (specifieke) massa	$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	
Soortelijk (specifiek) volume	$v$	$\text{m}^3/\text{kg}$	
Stoot (impuls)	$I$	$\text{N} \cdot \text{s}$	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$
Traagheidsmoment	$J, I$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	
Traagheidsstraal	$i$	m	
Vermogen, mechanisch	$P$	W	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Volumieke massa (dichtheid)	$\rho$	$\text{kg}/\text{m}^3$	
Wrijvingscoëfficiënt	$\mu, f$	–	
Zwaarteveldsterkte	$g$	$\text{N}/\text{kg}$	$\text{m}/\text{s}^2$

*Tabel 1.3 Vaste-stofmechanica*

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Afschuiving (schuifhoek)	$\gamma$	–	
Afschuivingsmodulus	$G$	N/m <sup>2</sup>	kg/(m·s <sup>2</sup> )
Compliantie	$c$	m/N	s <sup>2</sup> /kg
Compressibiliteit	$\kappa$	Pa <sup>-1</sup>	m·s <sup>2</sup> /kg
Compressiemodulus	$K$	Pa	kg/(m·s <sup>2</sup> )
Elasticiteitsmodulus	$E$	Pa	kg/(m·s <sup>2</sup> )
Glijdingsmodulus	$G$	Pa	kg/(m·s <sup>2</sup> )
Kerfslagwaarde	$K$	J	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Kwadratisch oppervlaktemoment	$I$	m <sup>4</sup>	
Lineair oppervlaktemoment	$S$	m <sup>3</sup>	
Poisson-verhouding	$\mu$	–	
Relatieve rek	$\varepsilon$	–	
Relatieve volumeverandering	$\vartheta$	–	
Schuifhoek (afschuiving)	$\gamma$	–	
Spanning	$p$	Pa	N/m <sup>2</sup> = kg/(m·s <sup>2</sup> )
Statisch moment	$S$	m <sup>3</sup>	
Sterkte (rekgrens)	$R$	Pa	N/m <sup>2</sup> = kg/(m·s <sup>2</sup> )
Trekspanning, trekvastheid	$\sigma$	N/m <sup>2</sup>	kg/(m·s <sup>2</sup> )
Veerstijfheid	$k$	N/m	kg/s <sup>2</sup>
Weerstandsmoment	$W$	m <sup>3</sup>	

*Tabel 1.4 Gas- en vloeistofmechanica (stromingsleer)*

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Circulatie (wervelsterkte)	$\Gamma$	m <sup>2</sup> /s	
Compressibiliteitsfactor	$z$	–	
Fluïditeit	$\Phi$	Pa <sup>-1</sup> ·s <sup>-1</sup>	m·s/kg
Impulsmomentstroom	$\dot{L}$	N·m	kg·m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Impulsstroom	$\dot{p}$	N	kg·m/s <sup>2</sup>
Oppervlaktespanning	$\sigma, \gamma$	N/m	kg/s <sup>2</sup>
Potentiaalfunctie = snelheidspotential	$\Phi$	m <sup>2</sup> /s	
Viscositeit (dynamisch)	$\eta$	Pa·s	kg/(m·s)
Viscositeit (kinematisch)	$\nu$	m <sup>2</sup> /s	
Weerstandscoefficiënt	$\zeta$	–	
Weerstandsfactor voor pijpen	$\lambda$	–	
Wervelsterkte (circulatie)	$\Gamma$	m <sup>2</sup> /s	



Tabel 1.5 Elektriciteit en magnetisme

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Admittantie	$Y$	S	$A^2 \cdot s^3 / (kg \cdot m^2)$
Arbeidsfactor	$\lambda$	–	
Blind(reactief-) vermogen	$Q(P_q)$	var	$kg \cdot m^2 / s^3$
Capaciteit (elektr.)	$C$	F	$C/V = A^2 \cdot s^4 / (kg \cdot m^2)$
Conductantie	$G$	S	$A^2 \cdot s^3 / (kg \cdot m^2)$
Conductiviteit	$\gamma, \sigma$	S/m	$A^2 \cdot s^3 / (kg \cdot m^3)$
Diëlektrische constante (permittiviteit)	$\epsilon$	F/m	$A^2 \cdot s^4 / (kg \cdot m^3)$
Elektrisatie	$E_i$	V/m	$kg \cdot m / (A \cdot s^3)$
Elektrisch(e)			
dipoolmoment	$p$	C · m	A · m · s
energie	$W, E$	J	$kg \cdot m^2 / s^2$
flux	$\Psi$	C	A · s
fluxdichtheid	$D$	C/m <sup>2</sup>	A · s/m <sup>2</sup>
lading	$Q$	C	A · s
ladingsdichtheid (vol. lading)	$\rho$	C/m <sup>3</sup>	A · s/m <sup>3</sup>
polarisatie	$P, D_i$	C/m <sup>2</sup>	A · s/m <sup>2</sup>
potentiaal	$V, \phi$	V	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)$
potentiaalverschil	$V$	V	
spanning	$U, V$	V	
stroom	$I$	A	
stroomdichtheid	$J$	A/m <sup>2</sup>	
susceptibiliteit	$\chi$	–	
veldsterkte	$E$	V/m	$kg \cdot m / (A \cdot s^3)$
vermogen	$P$	W	$kg \cdot m^2 / s^3$
verplaatsing	$D$	C/m <sup>2</sup>	A · s/m <sup>2</sup>
weerstand	$R$	$\Omega$	$V/A = kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^3)$
Elektromotorische kracht (emk)	$E$	V	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)$
Geleiding	$G$	S	$A^2 \cdot s^3 / (kg \cdot m^2)$
Hoeveelheid elektriciteit (lading)	$Q$	C	A · s
Impedantie	$Z$	$\Omega$	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^3)$
Inductantie	$L$	H	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^2)$
Koppelfactor	$k$	–	
Lekfactor (spreidingscoëff.)	$\sigma$	–	
Magnetisatie	$M$	A/m	
Magnetisch(e)			
bronspanning (mmk)	$U_m(F_m)$	A	
dipoolmoment	$j$	Wb · m	$kg \cdot m^3 / (A \cdot s^2)$
energie	$W$	J	$W \cdot s = kg \cdot m^2 / s^2$
flux	$\Phi$	Wb	$V \cdot s = kg \cdot m^2 / (A \cdot s^2)$
fluxdichtheid (inductie)	$B$	T	$Wb/m^2 = kg / (A \cdot s^2)$
moment	$m$	A · m <sup>2</sup>	
polarisatie	$J$	T	$kg / (A \cdot s^2)$
spanning	$U$	A	
susceptibiliteit	$\kappa, \chi_m$	–	
vectorpotentiaal	$A$	Wb/m	$kg \cdot m / (A \cdot s^2)$
veldsterkte	$H$	A/m	
weerstand (reluctantie)	$R_m$	H <sup>-1</sup>	$A^2 \cdot s^2 / (kg \cdot m^2)$

Tabel 1.5 (vervolg)

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Magnetomotorische kracht (mmk)	$U_m, F_m$	A	
Momentele elektrische spanning	$u$	V	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A} \cdot \text{s}^3)$
Momentele elektrische stroom	$i$	A	
Omstroming, oppervlaktestroomdichtheid	$A$	A/m	
Permeabiliteit	$\mu$	H/m	$\text{kg} \cdot \text{m} / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^2)$
Permeantie	$\Lambda$	H	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^2)$
Permittiviteit	$\varepsilon$	F/m	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 / (\text{kg} \cdot \text{m}^3)$
Pointing vector	$S$	W/m <sup>2</sup>	$\text{kg} / \text{s}^3$
Reactantie	$X$	$\Omega$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
Reactief(blind-) vermogen	$Q(P_q)$	var	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^3$
Relatieve permeabiliteit	$\mu_r$	–	
Relatieve permittiviteit	$\varepsilon_r$	–	
Reluctantie	$R_m$	H <sup>-1</sup>	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^2 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
Resistantie (elektrische weerstand)	$R$	$\Omega$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
Resistiviteit (soortel. weerstand)	$\rho$	$\Omega \cdot \text{m}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^3 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
Schijnvermogen	$S$	VA	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^3$
Soortelijke geleiding	$\gamma, \sigma$	S/m	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^3 / (\text{kg} \cdot \text{m}^3)$
Soortelijke weerstand	$\rho$	$\Omega \cdot \text{m}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^3 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
Spreadingscoëff. (lekfactor)	$\sigma$	–	
Susceptantie	$B$	S	$\text{A}^2 \cdot \text{s}^3 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
Verliesfactor	$d$	–	
Verlieshoek	$\delta$	rad	
Vlakteladingsdichtheid	$\sigma$	C/m <sup>2</sup>	$\text{A} \cdot \text{s} / \text{m}^2$
Vierkantsweerstand	$R_{\square}$	$\Omega$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
Volumieke lading (ladingsdichtheid)	$\rho$	C/m <sup>3</sup>	$\text{A} \cdot \text{s} / \text{m}^3$
Wederzijdse inductie	$M$	H	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^2)$
Werkzaam elektr. vermogen	$P$	W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^3$
Zelfinductie	$L$	H	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{A}^2 \cdot \text{s}^2)$

Tabel 1.6 Warmte en thermodynamica

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Celsiustemperatuur	$t, \vartheta$	$^{\circ}\text{C}$	$1^{\circ}\text{C} = 1\text{K}$
Enthalpie	$H$	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
Entropie	$S$	J/K	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})$
Hoeveelheid warmte	$Q$	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
Inwendige energie	$U, E$	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
Overgangsenergie	$L$	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
Relatieve spanningscoëfficiënt	$\beta, \alpha_p$	$\text{K}^{-1}$	
Soortelijke			
enthalpie	$h$	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$
entropie	$s$	J/(kg·K)	$\text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})$
inwendige energie	$u, e$	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$
overgangsenergie	$l$	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$
vrije energie	$f$	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$
vrije enthalpie	$g$	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$
warmte (capaciteit)	$c$	J/(kg·K)	$\text{m}^2/(\text{s}^2\cdot\text{K})$
warmteverhouding	$\gamma$	–	
Temperatuur (absolute)	$T$	K	
Temperatuurgradient		K/m	
Temperatuur vereffeningscoëff.	$a$	$\text{m}^2/\text{s}$	
Uitzettingscoëfficiënt (lineaire)	$\alpha, \lambda$	$\text{K}^{-1}$	
Uitzettingscoëfficiënt (kubieke)	$\gamma, \alpha_v$	$\text{K}^{-1}$	
Vermogen (thermisch)	$P$	W	$\text{J/s} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$
Vrije energie	$F$	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
Vrije enthalpie	$G$	J	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
Warmte:			
capaciteit	$C$	J/K	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/(\text{K}\cdot\text{s}^2)$
doorgangcoëfficiënt	$K$	W/( $\text{m}^2\cdot\text{K}$ )	$\text{kg}/(\text{K}\cdot\text{s}^3)$
geleiding	$G$	W/K	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/(\text{K}\cdot\text{s}^3)$
geleidingscoëfficiënt	$\lambda$	W/( $\text{m}\cdot\text{K}$ )	$\text{kg}\cdot\text{m}/(\text{K}\cdot\text{s}^3)$
-isolatiecoëfficiënt	$M$	$\text{K}\cdot\text{m}^2/\text{W}$	$\text{K}\cdot\text{s}^3/\text{kg}$
-overdrachtscoëfficiënt	$\alpha, h$	W/( $\text{m}^2\cdot\text{K}$ )	$\text{kg}/(\text{K}\cdot\text{s}^3)$
stroom	$Q, \Phi$	W	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3$
stroomdichtheid	$q$	W/ $\text{m}^2$	$\text{kg}/\text{s}^3$
weerstand	$R, R_w, \theta$	K/W	$\text{K}\cdot\text{s}^3/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
Weerstandstemperatuurcoëff.	$\alpha$	$\text{K}^{-1}$	

*Tabel 1.7 Chemische stof en materie*

grootheid	symbool <sup>1)</sup>	eenheid	afleiding
Aantal elementaire deeltjes	$N$	–	
Atoomgewicht	$A$	–	
Atoomnummer	$Z$	–	
Chemische potentiaal	$\mu_B$	J/kmol	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 / (\text{kmol} \cdot \text{s}^2)$
Deeltjesdichtheid	$n$	$\text{m}^{-3}$	
Diffusiecoëfficiënt	$D$	$\text{m}^2/\text{s}$	
Dissociatiegraad	$\alpha$	–	
Hoeveelheid stof	$n$	kmol	
Ionensterkte	$I$	kmol/kg	
Massaconcentratie	$\rho_B$	$\text{kg}/\text{m}^3$	
Massafractie	$w_B$	–	
Molair(e)			
concentratie	$c_B$	kmol/ $\text{m}^3$	
fractie	$x_B$	–	
massa	$M$	kg/kmol	
volume	$V_m$	$\text{m}^3/\text{kmol}$	
Molaliteit	$m_B$	kmol/kg	
Moleculair gewicht	$M$	–	
Molecuul-concentratie	$C_B$	$\text{m}^{-3}$	
Molecuul-dichtheid	$n$	$\text{m}^{-3}$	
Osmotische druk	$\Pi$	Pa	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Relatieve atoommassa	$A_r$	–	
Relatieve molecuulmassa	$M_r$	–	
Thermodiffusie-coëfficiënt	$D_T$	$\text{m}^2/\text{s}$	

<sup>1)</sup> Index B geeft aan: van component B.

Tabel 1.8 Elektromagnetische straling en licht

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Absorptiecoëfficiënt (spectrale) <sup>2)</sup>	$a(\lambda)$	$m^{-1}$	
Absorptiefactor (spectrale) <sup>2)</sup>	$\alpha(\lambda)$	–	
Belichting	$H$	$lx \cdot s$	$cd \cdot sr \cdot s/m^2$
Bestralingssterkte <sup>1)</sup>	$E, E_e$	$W/m^2$	$kg/s^3$
Brekingsindex	$n$	–	
Emissiefactor (spectrale) <sup>2)</sup>	$\varepsilon(\lambda)$	–	
Emittantie (licht)	$M, M_v$	$lm/m^2$	$cd \cdot sr/m^2$
Golflengte	$\lambda$	$m$	
Hoeveelheid licht	$Q, Q_y$	$lm \cdot s$	$cd \cdot sr \cdot s$
Irradiantie (= bestralingssterkte) <sup>1)</sup>	$E, E_e$	$W/m^2$	$kg/s^3$
Lichtsnelheid (in vacuüm)	$c(c_0)$	$m/s$	
Lichtsterkte	$I, I_v$	$cd$	
Lichtstroom	$\Phi, \Phi_v$	$lm$	$cd \cdot sr$
Luminantie	$L, L_v$	$cd/m^2$	
Radiantie <sup>1)</sup>	$L, L_e$	$W/(m^2 \cdot sr)$	$kg/(s^3 \cdot sr)$
Reflectiefactor (spectrale) <sup>2)</sup>	$\rho(\lambda)$	–	
Stralings- emittantie	$M, M_e$	$W/m^2$	$kg/s^3$
energie	$Q, Q_e, W$	$J$	$kg \cdot m^2/s^2$
energiedichtheid	$w$	$J/m^3$	$kg/(m \cdot s^2)$
flux	$\Phi, \Phi_e$	$W$	$kg \cdot m^2/s^3$
fluxdichtheid	$\varphi$	$W/m^2$	$kg/s^3$
intensiteit (sterkte)	$I, I_e$	$W/sr$	$kg \cdot m^2/(s^3 \cdot sr)$
Transmissiefactor (spectrale) <sup>2)</sup>	$\tau(\lambda)$	–	
Verlichtingssterkte	$E, E_v$	$lx$	$cd \cdot sr/m^2$
Verzwakkingscoëfficiënt (spectrale) <sup>2)</sup>	$\mu(\lambda)$	$m^{-1}$	

<sup>1)</sup> Van de grootheden  $E_e, I_e, L_e, M_e, Q_e, w$  en  $\Phi_e$  bestaat een *spectrale concentratie* over een golflengtegebiedje  $d\lambda$ , aan te geven met index  $\lambda$  in het symbool. In de eenheid en afleiding komt een extra factor  $m^{-1}$ .

<sup>2)</sup> Grootheden die een functie zijn van  $\lambda$  worden aangegeven door  $(\lambda)$ , bijv.  $\varepsilon(\lambda)$ .

*Tabel 1.9 Geluid*

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Akoestische impedantie	$Z_a$	$\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3$	$\text{kg}/(\text{m}^4 \cdot \text{s})$
Akoestisch vermogen	$P$	W	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Deeltjessnelheid (momenteel)	$u, v$	m/s	
Geluidsdruk (momenteel)	$p$	Pa	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Geluidsdruk niveau	$L_p$	(dB)	
Geluidsenergiedichtheid	$E^p$	$\text{J}/\text{m}^3$	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Geluidsintensiteit	$I$	$\text{W}/\text{m}^2$	$\text{kg}/\text{s}^3$
Geluidsintensiteitsniveau	$L_I$	(dB)	
Geluidssnelheid	$c$	m/s	
Mechanische impedantie	$Z_m$	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$	$\text{kg}/\text{s}$
Specifieke akoestische impedantie	$Z_s$	$\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}$	$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$
Statische druk	$p_s$	Pa	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Vermogensniveau	$L_p, L_w$	–	(dB)

*Tabel 1.10 Atomaire en moleculaire verschijnselen*

grootheid	symbool	eenheid	afleiding
Activiteit	$A$	Bq	$\text{s}^{-1}$
Desintegratieconstante (vervalconst.)	$\lambda$	$\text{s}^{-1}$	
Dosis (geabsorbeerde)	$D$	Gy	$\text{m}^2/\text{s}^2$
Dosisequivalent	$\dot{H}$	Sv	$\text{m}^2/\text{s}^2$
Dosistempo	$\dot{D}$	Gy/s	$\text{m}^2/\text{s}^3$
Exposie	$X$	C/kg	$\text{A} \cdot \text{s}/\text{kg}$
Exposietempo	$\dot{X}$	$\text{C}/(\text{kg} \cdot \text{s})$	$\text{A}/\text{kg}$
Halveringstijd	$T_{1/2}$	s	
Neutronental	$N$	–	
Nucleonental	$A$	–	
Protonental (= atoomnummer)	$Z$	–	
Specifieke activiteit	$a$	Bq/kg	$(\text{s} \cdot \text{kg})^{-1}$

## 1.5 Niet tot SI behorende eenheden

In tabel 1.11 zijn een aantal nog voorkomende eenheden gegeven die niet tot het SI behoren. De meeste hiervan mogen niet meer officieel gebruikt worden (de zgn. *oude eenheden*, aangegeven met een kruisje). De tabel geeft verder de herleiding van de vermelde eenheden naar SI-eenheden. Een volledige alfabetische lijst met (oude) Europese en Amerikaanse eenheden en hun herleiding naar SI kan men vinden in NEN 3049

Tabel 1.11 Niet tot SI behorende eenheden

eenheid	1)	symbool	herleiding <sup>2)</sup>
ampère-uur	×	Ah	$= 3,6 \times 10^3 \text{ C}$
ångström	×	Å	$= 10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$
apostilb	×	asb	$= (1/\pi) \text{ cd/m}^2$
are		a	$= 100 \text{ m}^2$
astronomische eenheid		AE	$= 149,6 \times 10^9 \text{ m}$
atmosfeer (fysische, 760 mm Hg)	×	atm	$= 101\,325 \text{ Pa}$
atmosfeer (technisch, kgf/cm <sup>2</sup> )	×	at	$= 98\,066,5 \text{ Pa}$
bar		bar	$= 10^5 \text{ Pa}$
biot	×	Bi	$= 10 \text{ A}$
calorie (Internat. Table)	×	cal	$= 4,1868 \text{ J}$
calorie, thermochemisch	×	cal <sup>thch</sup>	$= 4,184 \text{ J}$
curie	×	Ci	$= 37 \times 10^9 \text{ Bq}$
dag (24 h)		d	$= 86,4 \times 10^3 \text{ s}$
denier (= 1/9 tex)	×	den (Td)	$= 1/9 \times 10^{-6} \text{ kg/m}$
dioptrie		dpt (δ)	$= 1 \text{ m}^{-1}$
dyne (= g·cm/s <sup>2</sup> )	×	dyn	$= 10^{-5} \text{ N}$
elektronvolt		eV	$\approx 0,160\,2177 \times 10^{-18} \text{ J}$
erg (= dyn·cm)	×	erg	$= 10^{-7} \text{ J}$
fermi	×	fm	$= 10^{-15} \text{ m}$
gal (= cm/s <sup>2</sup> )	×	Gal	$= 10^{-2} \text{ N/kg}$
gamma	×	γ	$= 10^{-9} \text{ T}$
gauss (eme-stelsel)	×	Gs	$= 10^{-4} \text{ T}$
geografische mijl	×		$\approx 7409,10 \text{ m}$
gilbert (eme-stelsel)	×	Gb	$= 10/(4\pi) \approx 0,795774 \text{ A}$
graad (decimale)		gon (... <sup>g</sup> )	$= \pi/200 \text{ rad} \approx 15,7080 \text{ mrad}$
graad (hoek)		... <sup>o</sup>	$= \pi/180 \text{ rad} \approx 17,4533 \text{ mrad}$
gramatoom	×	grat	= mol atomen
grammolecuul	×	grol	= mol moleculen
Hollandse mijl	×		$\approx 5555,6 \text{ m}$
jaar (365 dagen)		j	$= 31,536 \times 10^6 \text{ s}$
jaar (tropisch)		a	$\approx 365,2422 \text{ d}$ $\approx 31,5569 \times 10^6 \text{ s}$
karaat (metriek-)		Kt, ct	$= 0,2 \times 10^{-3} \text{ kg}^3$
kilogramkracht = kilopond	×	kgf, kp	$= 9,806\,65 \text{ N}$
kilometer per uur		km/h	$\approx 0,277\,778 \text{ m/s}$
kilowattuur		kWh	$= 3,6 \times 10^6 \text{ J}$
knoop (zeemijl/uur)		kn	$\approx 0,514\,444 \text{ m/s}$
lambert	×	L	$= 10^4/\pi \text{ cd/m}^2$
lichtjaar	×	ly	$\approx 9,46053 \times 10^{15} \text{ m}$
liter		L (l)	$= 10^{-3} \text{ m}^3$
maxwell (eme-stelsel)	×	Mx	$= 10^{-8} \text{ Wb}$
meter waterkolom	×	m H <sub>2</sub> O	$= 9,806\,65 \text{ kPa}$
micron	×	μ	$= 10^{-6} \text{ m}$
mm kwikkolom	4)	mm Hg	$\approx 133,322 \text{ Pa}$
minuut (hoek)		...'	$\approx 0,290\,888 \text{ mrad}$
minuut (tijd)		min	$= 60 \text{ s}$

*Tabel 1.11 (vervolg)*

eenheid	<sup>1)</sup>	symbool	herleiding <sup>2)</sup>
nit	×	nit	:= 1 cd/m <sup>2</sup>
octaaf		oct	:= log <sub>2</sub> (f <sub>2</sub> /f <sub>1</sub> )
oersted (eme-stelsel)	×	Oe	:= 10 <sup>3</sup> /(4π) ≈ 79,5775 A/m
omwentelingen per min.		omw/min	≈ 0,104 720 rad/s
paardekracht	×	pk	≈ 735,499 W
paardekrachttuur	×	pkh	≈ 2,6478 × 10 <sup>6</sup> J
parsec		pc	≈ 30,8572 × 10 <sup>15</sup> m
phot	×	ph	:= 10 <sup>4</sup> lx
poise (= dyn·s/cm <sup>2</sup> )	×	P	:= 0,1 Pa·s
poiseuille	×	Pl	:= 1 Pa·s
pond (Duits; gramkracht)	×	p	:= 9,806 65 × 10 <sup>-3</sup> N
rad (stralingsdosis)	×	rd	:= 10 <sup>-2</sup> Gy
registerton (= 100 ft <sup>3</sup> )			≈ 2,83168 m <sup>3</sup>
rem (dosisequivalent)	×	rem	:= 10 <sup>-2</sup> Sv
röntgen	×	R	≈ 258 × 10 <sup>-6</sup> C/kg
seconde (hoek)		..."	≈ 4,84814 × 10 <sup>-6</sup> rad
stilb	×	sb	:= 10 <sup>4</sup> cd/m <sup>2</sup>
stokes	×	St	:= 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s
technische massa-eenheid	×	TME	:= 9,806 65 kg
tex		tex	:= 10 <sup>-6</sup> kg/m
ton		t	:= 10 <sup>3</sup> kg
torr (mm kwikdruk)	×	torr	≈ 133,322 Pa
uur		h	:= 3600 s
zeemijl (internationaal)		(nmile)	:= 1852 m <sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> × betekent officieel gebruik niet toegestaan.

<sup>2)</sup> := betekend per definitie gelijk aan.

<sup>3)</sup> Voor edelmetalen is de *karaat* een maat voor de *zuiverheid*. Zuiver goud is 24-karaats goud.

<sup>4)</sup> Alleen toegestaan voor druk van lichaamsvocht (bloed).

<sup>5)</sup> Is gelijk aan een boogminuut op het aardoppervlak.

*Tabel 1.12 Overzicht van de meest voorkomende Engelse (UK) en Amerikaanse (US) eenheden (het wordt aangeraden deze niet meer te gebruiken)*

eenheid	symbool	herleiding
<b>lengte</b>		
mil (= 0,001 in)	mil	25,4 × 10 <sup>-6</sup> m
inch	in	:= 25,4 × 10 <sup>-3</sup> m
foot (= 12 in)	ft	= 0,3048 m
yard (= 3 ft)	yd	= 0,9144 m
fathom (= 6 ft)	fath	= 1,8288 m
furlong (= 220 yd)	fur	= 201,168 m
statute mile (= 1760 yd)	mi	= 1609,344 m



*Tabel 1.12 (vervolg)*

eenheid	symbool	herleiding
<b>oppervlakte</b>		
acre	acre	$\approx 4046,86 \text{ m}^2$
circular inch	cir in	$\approx 0,506\ 707 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
<b>inhoud (UK)</b>		
fluid ounce	fl oz	$\approx 28,4131 \times 10^{-6} \text{ m}^3$
pint (= 20 fl oz)	pt	$\approx 568,261 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
quart (= 2 pt)	qt	$\approx 1,136\ 52 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
gallon (= 4 qt)	(UK) gal	$\approx 4,546\ 09 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
bushel (= 8 gal)	bu	$\approx 36,3687 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
quarter (= 8 bu)	qr	$\approx 0,290\ 950 \text{ m}^3$
<b>inhoud (US, voor vloeistoffen)</b>		
fluid ounce	fl oz	$\approx 29,5735 \times 10^{-6} \text{ m}^3$
liquid pint (= 16 fl oz)	liq pt	$\approx 0,473\ 176 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
liquid quart (= 2 liq pt)	liq qt	$\approx 0,946\ 353 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
gallon (= 4 liq qt)	(US) gal	$\approx 3,785\ 41 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
barrel (= 42 gal)	bbl	$\approx 0,158\ 987 \text{ m}^3$
<b>inhoud (US, voor droge stoffen)</b>		
dry pint	dry pt	$\approx 0,550\ 610 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
dry quart (= 2 dry pt)	dry qt	$\approx 1,101\ 22 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
dry gallon (= 4 dry qt)	dry gal	$\approx 4,404\ 88 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
peck (= 2 dry gal)	pk	$\approx 8,809\ 77 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
bushel (= 4 peck)	bu	$\approx 35,2391 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
dry barrel (= 7056 in <sup>3</sup> )	dry bbl	$\approx 0,115\ 627 \text{ m}^3$
<b>massa</b>		
ounce (UK, US) (= 1/16 lb)	oz	$\approx 28,3495 \times 10^{-3} \text{ kg}$
pound (UK, US)	lb	$\approx 0,453\ 592\ 37 \text{ kg}$
stone (UK, US) (= 14 lb)	st	$\approx 6,350\ 29 \text{ kg}$
quarter (UK, US) (= 28 lb)	qr	$\approx 12,7006 \text{ kg}$
hundredweight (US) (= 100 lb)	sh cwt	$\approx 45,3592 \text{ kg}$
hundredweight (UK) (= 112 lb) (= long hundredweight in US)	(UK) cwt	$\approx 50,8023 \text{ kg}$
US ton = short ton (= 2000 lb)	US ton	$\approx 907,185 \text{ kg}$
UK ton = long ton (US) (= 2240 lb)	UK ton	$\approx 1,016\ 05 \times 10^3 \text{ kg}$
slug (= 1 lbf·s <sup>2</sup> /ft)	slug	$\approx 14,5939 \text{ kg}$

*Tabel 1.12 (vervolg)*

eenheid	symbool	herleiding
<b>kracht, arbeid, vermogen, druk</b>		
poundal	pdl	$\approx 0,138\,255\text{ N}$
pound (kracht)	lbf	$\approx 4,448\,22\text{ N}$
horsepower (= 550 ft·lbf/s)	hp	$\approx 745,699\,87\text{ W}$
british thermal unit (= 1 kcal·lb·°F/(kg·K))	Btu	$\approx 1055,06\text{ J}$
pound per sq. inch	psi	$\approx 6894,76\text{ Pa}$
<b>overig</b>		
mil = strich	mil	$= 2\pi/6400\text{ rad} \approx 0,981\,748\text{ mrad}$
foot candle	fc	$\approx 10,764\text{ lux}$
foot lambert	fL	$\approx 3,4263\text{ cd/m}^2$
cycle per second	c/s	$= 1\text{ Hz}$
revolutions per minute	rpm	$= 1/60\text{ s}^{-1} = 16,6 \cdot 10^{-3}\text{ Hz}$
mho	mho	$= 1/\Omega = \text{S}$
° Fahrenheit	°F	$T(\text{K}) = 5/9 [t(^{\circ}\text{F}) + 459,67]$

*Tabel 1.13 Nog voorkomende, verouderde eenheden van viscositeit*

graad Engler °E	sec Redwood I	sec Redwood II	sec Saybolt	herleiding $\text{m}^2/\text{s}$
1,0	27	—	28	$1,0 \times 10^{-6}$
5,0	154	17	181	$37,3 \times 10^{-6}$
10,0	311	32	365	$77 \times 10^{-6}$
15	466	47	548	$114 \times 10^{-6}$
20	621	62	730	$152 \times 10^{-6}$
25	776	78	910	$190 \times 10^{-6}$

## 1.6 Berekening herleidingsfactoren

Herleidingsfactoren treden op:

- 1 Bij overgang van samengestelde (oude) eenheden naar andere eenheden (bijv. SI).
- 2 Als in een formule grootheden worden uitgedrukt in andere dan gewenste eenheden.

Berekening vindt plaats d.m.v. de substitutiemethode: voor elke te vervangen enkelvoudige eenheid wordt de grootte in de gewenste eenheid uitgedrukt, gesubstitueerd. Voorbeelden:

$$1 \quad 1 \frac{\text{Btu}}{\text{ft}^2 \cdot \text{h}} = \frac{1055,06 \text{ J}}{(0,3048 \text{ m})^2 \cdot 3600 \text{ s}}$$
$$= 3,15460 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = 3,15460 \text{ W/m}^2$$

$$2 \quad R = \frac{\rho \cdot l}{A}, \text{ waarin: } \rho \text{ in } \Omega\text{m}, l \text{ in m}, A \text{ in m}^2, R \text{ in } \Omega$$

$$\text{Gegeven: } \rho \text{ in } \mu\Omega \cdot \text{cm}, l \text{ in cm}, d \text{ in mm} \left( A = \frac{\pi}{4} d^2 \right)$$

Gevraagd:  $R$  uit te drukken in  $\text{m}\Omega$

Formule wordt:  $R = k \frac{\rho \cdot l}{d^2}$ , waarin  $k$  te berekenen.

$$k = \frac{R \cdot d^2}{\rho \cdot l} = \frac{\frac{R}{\text{m}\Omega} \cdot \frac{4}{\pi} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}}{\frac{\rho}{\mu\Omega \cdot \text{cm}} \cdot \frac{l}{\text{cm}}} = \frac{\frac{R}{10^{-3} \Omega} \cdot \frac{4}{\pi} \frac{\text{A}}{10^{-6} \text{m}^2}}{\frac{\rho}{10^{-8} \Omega\text{m}} \cdot \frac{l}{10^{-2} \text{m}}} =$$
$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10^{-10}}{10^{-9}} \cdot \frac{\frac{R}{\Omega} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}^2}}{\frac{\rho}{\Omega \cdot \text{m}} \cdot \frac{l}{\text{m}}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10^{-10}}{10^{-9}} = \frac{0,4}{\pi}$$

## 1.7 Decimale voorvoegsels (SI)

Tabel 1.14 Decimale voorvoegsels volgens SI

naam	symbool	waarde	naam	symbool	waarde
yotta	Y	$10^{24}$	deci	d	$10^{-1}$
zetta	Z	$10^{21}$	centi	c	$10^{-2}$
exa	E	$10^{18}$	milli	m	$10^{-3}$
peta	P	$10^{15}$	micro	$\mu$	$10^{-6}$
tera	T	$10^{12}$	nano	n	$10^{-9}$
giga	G	$10^9$	pico	p	$10^{-12}$
mega	M	$10^6$	femto	f	$10^{-15}$
kilo	k	$10^3$	atto	a	$10^{-18}$
hecto	h	$10^2$	zepto	z	$10^{-21}$
deca	da	$10^1$	yocto	y	$10^{-24}$

### Opmerkingen:

- Het wordt aanbevolen de voorvoegsels *hecto*, *deca*, *deci* en *centi* zoveel mogelijk te vermijden.
- Het symbool van een voorvoegsel vormt één geheel met het symbool van de eenheid waaraan het is toegevoegd.
- Combineren van voorvoegsels is niet toegestaan.

## 1.8 SI-symbolen (alfabetisch) met naam

Table 1.15 SI-symbolen (alfabetisch) met naam (zie par. 1.1 t/m 1.4 voor meer gegevens)

sym-bool	naam	sym-bool	naam
$A$	activiteit arbeid (liniëke) omstroming, oppervlaktestroom- dichtheid magnetische vector- potentiaal nucleonental oppervlak(te) vrije energie	$c_p$	soortelijke warmte bij constante druk
$A_r$	relatieve atoommassa (van een element)	$c_v$	soortelijke warmte bij constant volume
$a$	soortelijke vrije energie temperatuurvereffenings- coëfficiënt versnelling	$c_0$	lichtsnelheid in vacuüm
$a(\lambda)$	(spectrale) absorptie- coëfficiënt	$c_1$	eerste stralingsconstante
$B$	(magnetische) inductie, magnetische fluxdicht- heid susceptantie	$c_2$	tweede stralings- constante
$B_i$	magnetische polarisatie	$D$	diffusiecoëfficiënt draaistoot, aanzwengeling
$b$	breedte impulsmoment	$\dot{D}$	(geabsorbeerde) dosis dosistempo
$C$	capaciteit warmtecapaciteit	$D_i$	elektrische polarisatie
$C_B$	molecuulconcentratie van component B	$D_T$	thermodiffusiecoëfficiënt
$c$	geluidsnelheid snelheid soortelijke warmte- (capaciteit) compliantie	$d$	dikte middellijn relatieve (massa)- dichtheid verliesfactor
$c_B$	molaire concentratie van component B	$E$	bestralingssterkte, irra- diantie, ontvangen areïeke stralings- energiestroom elasticiteitsmodulus elektrische veldsterkte elektromotorische kracht energie (geluid)energiedichtheid inwendige energie verlichtingssterkte
		$E_e$	bestralingssterkte, irra- diantie, ontvangen

Tabel 1.15 (vervolg)

sym-bool	naam	sym-bool	naam
	areïeke stralings-energiestroom	$\hbar$	constante van <i>Dirac</i>
$E_i$	elektrisatie	$I$	kwadratisch oppervlaktemoment
$E_k$	kinetische energie		(elektrische) stroom
$E_p$	potentiële energie		enthalpie
$E_v$	verlichtingssterkte		(geluid)intensiteit
$e$	elementaire lading		ionensterkte
$F$	constante van <i>Faraday</i>		lichtsterkte
	kracht		(massa)traagheidsmoment
	omvatte stroom, magnetomotorische kracht		stoot, impuls
	vrije energie		stralingssterkte,
$F_o$	kengrootheid van <i>Fourier</i>		stralingsintensiteit,
$Fr$	kengrootheid van <i>Froude</i>		stralingsenergiestroom
$F_m$	omvatte stroom, magnetomotorische kracht		per ruimtehoek
$f$	frequentie	$I_e$	stralingssterkte,
	soortelijke vrije energie		stralingsintensiteit,
	wrijvingscoëfficiënt		stralingsenergiestroom
$G$	afschuivingsmodulus		per ruimtehoek
	geleiding, conductantie	$I_v$	lichtsterkte
	gravitatieconstante	$J$	magnetische polarisatie
	gewicht		(massa)traagheidsmoment
	vrije enthalpie		stroombichtheid
	warmtegeleiding	$j$	magnetisch dipoolmoment
$Gr$	kengrootheid van <i>Grashof</i>	$K$	compressiemodulus
$g$	soortelijke vrije enthalpie		kerfslagwaarde
	versnelling van de vrije val		warmtedoorgangscoefficiënt
	zwaarteveldsterkte	$k$	cirkelrepetentie
$g_n$	gestandaardiseerde zwaarteveldsterkte		constante van <i>Boltzmann</i>
			koppelfactor
$H$	belichting		veerstijfheid
	enthalpie	$L$	geluiddrukniveau,
	magnetische veldsterkte		geluiddrukpeil
$h$	constante van <i>Planck</i>		impulsmoment
	hoogte		luminantie
	soortelijke enthalpie		overgangsenergie,
	warmteoverdrachtscoëfficiënt		overgangswarmte
			radiantie
			zelfinductie, (elektrische)

Tabel 1.15 (vervolg)

sym-bool	naam	sym-bool	naam
$\dot{I}$	inductantie	$N$	aantal deeltjes, bijv. moleculen
$\dot{L}$	impulsmomentstroom		neutronental
$L_A$	verschil in amplitude-niveau	$Nu$	kengrootheid van <i>Nusselt</i>
$L_e$	radiantie	$N_A$	constante van <i>Avogadro</i>
$L_P$	verschil in vermogens-niveau	$n$	brekingsindex
$L_p$	geluiddrukkniveau, geluiddrukpeil		deeltjesdichtheid, volumiek aantal
$L_v$	luminantie		hoeveelheid stof
$L_W$	vermogensniveau, vermogenspeil		molecuuldichtheid, deeltjesdichtheid
$l$	lengte		rotatiefrequentie
	soortelijke overgangs-energie	$P$	actief vermogen, werkzaam vermogen
$M$	(licht)emittantie		(akoestisch) vermogen
	magnetisatie		elektrische polarisatie
	molaire massa		vermogen, energiestroom
	moment van kracht	$P_q$	reactief(blind-)vermogen
	stralingsemittantie	$Pr$	kengrootheid van <i>Prandtl</i>
	warmte-isolatiecoëfficiënt	$p$	druk, spanning
	wederkerige inductie		elektrisch dipoolmoment
$Ma$	kengrootheid van <i>Mach</i>		(van een molecuul)
$M_e$	stralingsemittantie		hoeveelheid beweging, impuls (van een massa), momentum
$M_r$	relatieve molecuulmassa (van een stof)		momentele geluiddruk (wisseldruk)
$M_v$	(licht)emittantie	$\dot{p}$	impulsstroom
$m$	(elektro)magnetisch moment	$p_s$	statische druk, evenwichtsdruk
	massa	$Q$	(elektrische) lading
$\dot{m}$	massastroom		hoeveelheid licht
$m_B$	molaliteit van component B in oplossing		hoeveelheid warmte
$m_e$	rustmassa van een elektron		kwaliteitsfactor
$m_n$	rustmassa van een neutron		reactief(blind-)vermogen
$m_p$	rustmassa van een proton		stralingsenergie
$m_u$	(geünificeerde) atoom-massaconstante	$\dot{Q}$	warmtestroom

Tabel 1.15 (vervolg)

sym-bool	naam	sym-bool	naam
$Q_e$	stralingsenergie		magnetische bronspanning, magnetisch potentiaalverschil
$Q_v$	hoeveelheid licht		
$q$	warmtestroomdichtheid		
$q_m$	massastroom	$U_m$	magnetische spanning, magnetische bronspanning, magnetisch potentiaalverschil
$q_v$	volumestroom, (volume)-debiet	$u$	(akoestische) momentele deeltjessnelheid
$R$	(elektrische) weerstand, resistantie		snelheid
	molaire gasconstante		soortelijke inwendige energie
	sterkte, belastinggrens, rekgrens	$V$	(elektrische) potentiaal (elektrische) spanning, (elektrische) bronspanning, potentiaalverschil
	warmteweerstand		volume, inhoud
$Re$	kengrootheid van <i>Reynolds</i>	$\dot{V}$	volumestroom, (volume)-debiet
$R_m$	reluctantie	$V_m$	molair volume
$r$	straal		molair volume van ideaal gas
$S$	entropie	$v$	(akoestische) momentele deeltjesdichtheid
	lineair oppervlakte-moment, statisch moment		snelheid
	schijnvermogen		specifiek volume
	vector van <i>Poynting</i>		volumestroomdichtheid
$Sh$	kengrootheid van <i>Sherwood</i>	$W$	arbeid
$s$	soortelijke entropie		energie
	weg(lengte)		stralingsenergie
$T$	moment van koppel		weerstandsmoment
	periode(duur), trillingstijd	$w$	energiedichtheid
	temperatuur		snelheid
$T_{1/2}$	halveringstijd		stralingsenergiedichtheid
$t$	Celsius-temperatuur	$w_\lambda$	spectrale stralingsenergiedichtheid
	tijd	$X$	exposie
$U$	(elektrische) spanning, (elektrische) bronspanning, potentiaalverschil		reactantie
	energie	$\dot{X}$	exposietempo
	inwendige energie		
	magnetische spanning,		



Tabel 1.15 (vervolg)

sym-bool	naam	sym-bool	naam
$x_B$	molaire fractie van component B	$\delta$	dempingscoëfficiënt, decrescentie
$Y$	admittantie		dikte
$Z$	atoomnummer, protonental		verlieshoek
	impedantie	$\varepsilon$	emissiefactor
$Z_a$	akoestische impedantie		permittiviteit,
$Z_m$	mechanische impedantie		diëlektrische constante
$Z_s$	specifieke akoestische impedantie		relatieve rek, (relatieve) dwarscontractie
$z$	compressiebiliteitsfactor	$\varepsilon(\lambda)$	(spectrale) emissiefactor
		$\varepsilon_r$	relatieve permittiviteit
$\alpha$	dissociatiegraad	$\varepsilon_0$	elektrische constante, permittiviteit van het vacuüm
	hoekversnelling		
	lineaire uitzettingscoëfficiënt	$\zeta$	weerstandcoëfficiënt
	verzwakkingscoëfficiënt	$\eta$	(dynamische) viscositeit,
	warmteoverdrachtscoëfficiënt	$\theta$	temperatuur
$\alpha(\lambda)$	(spectrale) absorptiefactor	$\vartheta$	relatieve volumevergroting
$\alpha_p$	relatieve spanningscoëfficiënt	$\kappa$	compressibiliteit
$\alpha_v$	kubieke uitzettingscoëfficiënt		crescentie
$\alpha, \beta, \dots$	hoek (kleine Griekse letter naar keuze)		magnetische susceptibiliteit
$\beta$	fasecoëfficiënt	$\Lambda$	permeantie
	relatieve spanningscoëfficiënt	$\Lambda_m$	molaire geleiding
	spanningscoëfficiënt	$\lambda$	arbeidsfactor
$\Gamma$	circulatie, wervelsterkte		golflengte
$\gamma$	afschuiving, schuifhoek		lineaire uitzettingscoëfficiënt
	gravitatieveldsterkte		gemiddelde vrije weglengte
	kubieke uitzettingscoëfficiënt		warmtegeleidingscoëfficiënt
	oppervlaktespanning		weerstandsfactor voor pijpen
	soortelijke geleiding, conductiviteit	$\mu$	permeabiliteit
	verhouding $c_p/c_v$		Poisson-verhouding
	voortplantingscoëfficiënt	$\mu(\lambda)$	wrijvingscoëfficiënt
			(lineïeke) (spectrale) verzwakkingscoëfficiënt
		$\mu_B$	chemische potentiaal

Tabel 1.15 (vervolg)

sym-bool	naam	sym-bool	naam
	van component B		lekfactor
$\mu_r$	relatieve permeabiliteit		vlakteladingsdichtheid
$\mu_0$	magnetische constante, permeabiliteit van het vacuüm	$\tau$	schuifspanning
$\nu$	frequentie	$\tau(\lambda)$	tijdconstante (spectrale) transmissiefactor
	kinematische viscositeit	$\Phi$	fluïditeit
	Poisson-verhouding		lichtstroom
$\Pi$	osmotische druk		magnetische flux
$\rho$	(massa)dichtheid, volumieke massa, massa per volume		massastroomdichtheid
	soortelijke weerstand, resistiviteit		snelheidspotentiaal, potentiaalfunctie
	volumieke lading, (ruimtelijke) ladingsdichtheid		stralingsflux, stralingsenergiestroom
$\rho(\lambda)$	(spectrale) reflectiefactor		warmtestroom
$\rho_A$	areïeke massa, massa per oppervlakte	$\Phi_e$	stralingsflux, stralingsenergiestroom
$\rho_B$	(massa)concentratie van component B	$\Phi_v$	lichtstroom
$\rho_l$	liniëeke massa, massa per lengte	$\varphi$	(elektrische) potentiaal
$\sigma$	constante van <i>Stefan-Boltzmann</i>		faseverschil, faseverschuiving
	normaalspanning		stralingsfluxdichtheid
	oppervlaktespanning	$\chi, \chi_e$	elektrische susceptibiliteit
	repetentie		
	soortelijke geleiding, conductiviteit	$\chi_m$	magnetische susceptibiliteit
	spreidingscoëfficiënt,		
		$\Psi$	elektrische flux
		$\Omega$	ruimtehoek
		$\omega$	cirkelfrequentie, pulsatie
			hoeksnelheid
			ruimtehoek

## 2 Romeinse cijfers

I = 1	VI = 6	L = 50
II = 2	VII = 7	C = 100
III = 3	VIII = 8	D = 500
IV = 4	IX = 9	M = 1000
V = 5	X = 10	

Bij het samenstellen van een getal gelden de volgende regels:

- *Waardevergroting* krijgt men door *achter* een cijfer één (of meer) cijfer(s) met gelijke of kleinere waarde te zetten.
- *Waardevermindering* krijgt men door *vóór* een cijfer één cijfer met kleinere waarde te zetten.
- Bij verdere samenstelling neemt de waarde van cijfers of cijfercombinaties van links naar rechts af.

Voorbeelden:

1692 = MDCXCII

1989 = MCMLXXXIX

1997 = MCMXCVII of MXMVII

### 3 Griekse lettertekens

Tabel 3.1 Eenvoudige en duidelijke tekens voor de Griekse letters, toe te passen in drukwerk en bij het schrijven met sjablonen, redispennen e.d. (de letters zijn gebaseerd op de klassieke Griekse lettertekens)

drukletters		sjabloonletters		naam
hoofd-letter	kleine letter	hoofd-letter	kleine letter	
A	α	A	α	alfa
B	β	B	β	bêta
Γ	γ	Γ	γ	gamma
Δ	δ	Δ	δ	delta
E	ε	E	ε	epsilon
Z	ζ	Z	ζ	zêta
H	η	H	η	êta
Θ	θ,ϑ	Θ	ϑ	thêta
I	ι	I	ι	iôta
K	κ	K	κ	kappa
Λ	λ	Λ	λ	lambda
M	μ	M	μ	mu

drukletters		sjabloonletters		naam
hoofd-letter	kleine letter	hoofd-letter	kleine letter	
N	ν	N	ν	nu
Ξ	ξ	Ξ	ξ	xi(ksi)
O	ο	O	ο	omikron
Π	π	Π	π	pi
P	ρ,ϱ	P	ϱ	rhô
Σ	σ	Σ	σ	sigma
T	τ	T	τ	tau
Υ	υ	Υ	υ	upsilon
Φ	φ,ϕ	Φ	φ	fi
X	χ	X	χ	chi <sup>1)</sup>
Ψ	ψ	Ψ	ψ	psi
Ω	ω	Ω	ω	omega

<sup>1)</sup> De *ch* uitspreken als in het woord 'schat'.

# Wiskunde

---

## 1 Symbolen en tekens

## 2 Algebra en rekenkunde

- 2.1 Hoofdbewerkingen
- 2.2 Vergelijkingen
- 2.3 Rijen en reeksen
- 2.4 Functies
- 2.5 Limieten
- 2.6 Complexe rekenwijze
- 2.7 Afronden en nauwkeurigheid

## 3 Meetkunde

- 3.1 Coördinaten en hoeken
- 3.2 Driehoeken
- 3.3 Vierhoeken
- 3.4 Veelhoeken
- 3.5 Cirkels
- 3.6 Omtrek, oppervlakte, inhoud

## 4 Gonio- en trigonometrie, boldriehoeksmeting

- 4.1 Goniometrie
- 4.2 Trigonometrie (vlakke driehoeksmeting)
- 4.3 Boldriehoeksmeting

## 5 Analytische meetkunde

## 6 Differentiaal- en integraalrekening

- 6.1 Differentiaalrekening
- 6.2 Gewone differentiaalvergelijkingen
- 6.3 Partiële differentiaalvergelijkingen
- 6.4 Integraalrekening
- 6.5 Toepassingen integraalrekening

## **7 Transformaties (Fourier, Laplace)**

- 7.1 Fourier-analyse
- 7.2 Fourier-transformaties
- 7.3 Laplace-transformaties
- 7.4  $z$ -transformaties
- 7.5 Analyse van enkele golfvormen

## **8 Lineaire algebra**

- 8.1 Matrices
- 8.2 Matrixrekening
- 8.3 Determinanten
- 8.4 Lineaire (deel) ruimten, lineaire transformaties
  
- 8.5 Eigenwaarden, eigenvectoren
- 8.6 Lineaire vergelijkingen
- 8.7 Kwadratische vormen, kwadratische oppervlakken

## **9 Vectoralgebra en -analyse**

- 9.1 Vectoren
- 9.2 Vectoralgebra
- 9.3 Vectoranalyse
- 9.4 Integraalstellingen

## **10 Numerieke wiskunde**

- 10.1 Schatting nulpunten
- 10.2 Interpolatie, differentiatie en integratie
- 10.3 Differentiaalvergelijkingen
- 10.4 Lineaire vergelijkingen

# 1 Symbolen en tekens

Tabel 1.1 Symbolen en tekens in de wiskunde

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
=	gelijk aan	$a = b$
$\neq$	niet gelijk aan	$a \neq b$
$\equiv$	identiek met	$x \equiv t$ ; de variabele $x$ is identiek met de tijdvariabele $t$ (niet gebruiken in de betekenis van 'gelijk per definitie', zie hierna)
$\cong$	correspondeert met	als 1 cm op de kaart overeenkomt met 10 km in het terrein: $1 \text{ cm} \cong 10 \text{ km}$
$:=$ ( <sup>def</sup> )	is gedefinieerd als of per definitie gelijk aan	$a := b$ $a$ wordt gedefinieerd door $b$ ; in enkele programmeertalen gebruikt als toekenningsteken: $a$ wordt (krijgt de waarde van) $b$
$\approx$	ongeveer gelijk aan	$a \approx b$
$\simeq$ ( $\sim$ )	asymptotisch gelijk	$a \simeq b$
$\sim$ ( $\infty$ )	evenredig met ook: gelijkvormig	$a \sim b$
$\rightarrow$	nadert (tot)	$\lim_{x \rightarrow 0}$
$<$	kleiner dan	$a < b$
$>$	groter dan	$a > b$
$\leq$ ( $\leq$ )	kleiner dan of gelijk aan	$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ a \geq b \end{array} \right\} \leq \text{en } \geq \text{ voorkeur}$
$\geq$ ( $\geq$ )	groter dan of gelijk aan	
$\ll$	veel kleiner dan	$a \ll b$
$\gg$	veel groter dan	$a \gg b$
{ }	aanduiding verzameling	$V = \{a, b, c\}$
$\in$	element verzameling	$3 \in \{\text{oneven getallen}\}$
	waarvoor geldt dat	$\{x \in V \mid p(x)\}$
$\notin$	geen element verzameling	$4 \notin \{\text{oneven getallen}\}$
$\subset$	deelverzameling	$\{3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Tabel 1.1 (vervolg)

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
$\cap$	doorsnede (twee verzamelingen zijn <i>disjunct</i> wanneer hun doorsnede leeg is)	$\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$
$\cup$	vereniging	$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$
$\Omega$	universum (bij kansverdeling: uitkomstenruimte)	
$\emptyset$	lege verzameling	$\emptyset = \{ \};$ als $I \cap V = \emptyset$ is $I // V$
$\setminus$	verschil	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{0, 2, 4\}$
$\dots$	enzovoort	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\wedge$	en	$x \in \mathbb{N} \wedge x > 5$
$\vee$	of	$a \in A \vee a \in B$
$\dots \Rightarrow \dots$	als $\dots$ , dan $\dots$	$a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$
$\dots \Leftrightarrow \dots$	als $\dots$ , dan $\dots$ en omgekeerd	$a$ is veelvoud van $b \Leftrightarrow b$ is deler van $a$
$[ \dots ]$	gesloten interval	$[2, 5]$ het interval van 2 tot 5 met inbegrip van 2 en 5
$[ \dots )$	interval, aan één zijde open, aan één zijde gesloten	$[2, 5)$ 2 hoort er wél bij; 5 niet
$\langle \dots ]$	idem	$\langle 2, 5]$ 2 hoort er niet bij; 5 wél
$\langle \dots \rangle$	aan beide zijden open interval	$\langle 2, 5 \rangle$ 2 en 5 horen er niet bij
$+$	optellen	$a + b$
$-$	afrekken	$a - b$
$\cdot$ of $\times$	vermenigvuldigen	$a \cdot b$ of $a \times b$ of $ab$
$:$ of $-$ of $/$	delen	$a : b$ of $\frac{a}{b}$ of $a/b$
$*$	convolutie	$x * y$
$  \quad  $	modulus of absolute waarde	$ -5  = 5$ en $ 5  = 5$
$\sum$	sigma- of somteken	$\sum_{n=1}^4 n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
$\prod$	pi- of vermenigvuldigingsteken	$\prod_{n=1}^4 a_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$



Tabel 1.1 (vervolg)

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
!	faculteit	$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$
$\binom{n}{k}$	$n$ boven $k$ : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$
$\infty$ ( $\sim$ )	oneindig groot	
$\mathbb{N}$	verzameling natuurlijke getallen met nul	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}^+$	verzameling natuurlijke getallen zonder nul	$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	verzameling gehele getallen	$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	verzameling positieve gehele getallen	$\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
$\mathbb{Z}^-$	verzameling negatieve gehele getallen	$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$
$\mathbb{Q}$	verzameling rationale getallen	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}^+ \right\}$
$\mathbb{Q}^+$	verzameling positieve rationale getallen	$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$
$\mathbb{Q}^-$	verzameling negatieve rationale getallen	$\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$
$\mathbb{R}$	verzameling reële getallen	alle elementen uit $\mathbb{R}$ zijn op getallenrechte af te beelden
$\mathbb{R}^+$	verzameling positieve reële getallen	$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}^-$	verzameling negatieve reële getallen	$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	verzameling positieve reële getallen met nul	$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_0^-$	verzameling negatieve reële getallen met nul	$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
$\mathbb{C}$	verzameling complexe getallen	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$(a, b)$	geordend paar	
$\{a, b\}$	ongeordend paar	

Tabel 1.1 (vervolg)

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
$A \times B$	cartesisch product van de verzamelingen $A$ en $B$	$A \times B = \{(a, b)   a \in A \wedge b \in B\}$ $A = \{-2, 0, 1\}; B = \{1, 2\}$ $A \times B = \{(-2, 1), (-2, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$
$f: x \rightarrow \dots$	aanduiding voor functies van één variabele	$f: x \rightarrow x^2$
of $f = \{(x, y) \in V \times W   \dots\}$ of $f(x), x \in V$		of $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}   y = x^2\}$ of $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
$D_f$	domein van de functie $f$	$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in \mathbb{R};$
$B_f$	bereik van de functie $f$	$D_f = [-1, 1]; B_f = [0, 1]$
$f^{\text{inv}}$	inverse functie van $f$	$f(x) = e^x; f^{\text{inv}}(x) = \ln x$
$\sqrt{\quad}$	wortel (tweedemachtswortel)	$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow a = x^2, x \geq 0;$ $\sqrt{a^2} =  a $
$\sqrt[n]{\quad}$	$n^{\text{e}}$ -machtswortel	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$
$\log_g x$	logaritme van $x$ voor grondtal $g$	$\log_g b = a \Leftrightarrow g^a = b$
$\ln x$	natuurlijke logaritme van $x$ (grondtal $e$ )	
$\log x$	logaritme van $x$ voor grondtal 10	komen voor in de log-tafel: Briggse logaritmen
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limiet, de waarde waartoe $f(x)$ nadert, als $x$ tot $a$ nadert	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = 4$
$\lim_{x \uparrow a} f(x)$	linker limiet	$\lim_{x \uparrow 1} \frac{x - 1}{ x - 1 } = -1$
$\lim_{x \downarrow a} f(x)$	rechter limiet	$\lim_{x \downarrow 1} \frac{x - 1}{ x - 1 } = 1$
$//$	evenwijdig met	$l // m$
$\#$	evenwijdig met en gelijk aan	$a \# b$
$\perp$	loodrecht op	$l \perp m; AB \perp BC$
$\sim$	gelijkvormig met	$\triangle ABC \sim \triangle PQR$
$\cong$	congruent met	$\triangle ABC \cong \triangle PQR$
$\triangle$	driehoek	$\triangle ABC$

Tabel 1.1 (vervolg)

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
$\sphericalangle$	hoek	$\sphericalangle ABC$ ; $\sphericalangle A$ ; $\sphericalangle (l, m)$
$\perp \perp\!\!\!\perp$	rechte hoek	
$^{\circ} ' ''$	graad, minuut en seconde	$60^{\circ} 13' 14''$
rad	radiaal	$\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$
$P(x, y)$	punt P met coördinaten $x$ en $y$	$P(3, 2)$ : $x = 3$ en $y = 2$
$S_l$	spiegeling in lijn $l$	$A' = S_l(A)$
$S_P$	spiegeling in punt P	$A' = S_P(A)$
$S_V$	spiegeling in vlak V	$A' = S_V(A)$
$D_{O,+\alpha}$	draaiing om punt O van $\alpha$ graden links om	$A' = D_{O,+\alpha}(A)$
$T_{PQ}$	translatie over een verschuivingsvector $PQ$	$A' = T_{PQ}(A)$
$\circ$	operatieteken voor en na elkaar uitvoeren van transformaties	$S_l(A) \circ S_m(A) =$ spiegeling in $l$ na een spiegeling in $m$
$V_{O,k}$	vermenigvuldiging vanuit punt O met factor $k$	$V_{O,k}(AB) = (A'B')$ , waarin $A'B' = k \cdot AB$
$\rightarrow$	vector	$\overrightarrow{AB}$ is een vector met grootte $AB$ en richting $A \rightarrow B$
$\mathbf{a}$	vectoraanduiding	$\mathbf{a}$ is een vectoriële grootte
$\odot$	cirkel	$\odot(M;r) =$ cirkel met middelpunt $M$ en straal $r$
bg (of $\cap$ )	boog	bg $AB$ (of $\cap AB$ ) is boog $AB$
$\Delta$	differentie of absolute fout	$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ $a \pm \Delta a$
$\delta$	relatieve fout	$\delta a = \frac{\Delta a}{a}$
$f'$ of $\frac{df(x)}{dx}$ of $\frac{dy}{dx}$	eerste afgeleide	bijv. $y = x^2$ , $\frac{dy}{dx} = 2x$
$f^{(n)}$ of $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ of $\frac{d^n y}{dx^n}$	hogere afgeleide	bijv. $y = x^2$ , $\frac{d^2 y}{dx^2} = 2$

Tabel 1.1 (vervolg)

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
$df(x)$ of $dy$	differentiaal	$df(x) = f'(x) dx$ $dx^2 = 2x dx$
$\frac{\partial z}{\partial x}$	partiële afgeleide	bijv. $z = x^2 y^3$ ; $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$ ; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2$
$dz$	totale differentiaal	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$
$\int$	integraalteken	$\int f(x) dx = F(x) + C (C \in \mathbb{R})$ , $\frac{dF}{dx} = f(x)$
$\int_a^b$	bepaalde integraal tussen de grenzen $a$ en $b$	$\int_0^4 dx = x _0^4 = 4 - 0 = 4$
$\oint_{\mathcal{C}}$	kringintegraal langs contour $\mathcal{C}$	] zie bijv. par. 9.4, stelling van Gauss, stelling van Stokes
$\oiint_{\mathcal{S}}$	integraal over gesloten oppervlak $\mathcal{S}$	
$\iiint, \iiint$	herhaalde integratie (over 2 resp. 3 variabelen)	
$z^*$ (soms $\bar{z}$ )	complex toegevoegde van $z$	$z = 1 + i3$ ; $z^* = 1 - i3$ ( $\bar{z}$ liever niet gebruiken)
$\operatorname{Re}(z)$	reële deel van $z$	$\operatorname{Re}(1 + 2i) = 1$
$\operatorname{Im}(z)$	imaginaire deel van $z$	$\operatorname{Im}(1 + 2i) = 2$
$\arg$	argument	$\varphi = \arg(z) \in \langle -\pi, \pi ]$ $\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(x)}{\operatorname{Re}(x)}\right)$ $= \arctan\left(\frac{2}{1}\right) \approx 64^\circ$

Tabel 1.1 (vervolg)

teken of symbool	betekenis	toepassing/toelichting
$\nabla$	nabla-‘vector’	$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
grad	gradiënt van	grad $\varphi = \nabla\varphi$
div	divergentie van	div $\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$
rot	rotatie van	rot $\mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w}$
$\Delta$ of $\nabla \cdot \nabla$	Laplace-operator	$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$
$\mathcal{L}\{\}$	Laplace-getransformeerde	
$\mathcal{F}\{\}$	Fourier-getransformeerde	
$\det(A)$ of $ A $	determinant van matrix $A$	
$\forall$	universele (al) kwantor: voor alle elementen uit de gegeven verzameling geldt	$\forall_{p \in \mathbb{R}} [a > b \Leftrightarrow a + p > b + p]$
$\exists$	existentie-kwantor: voor minstens één element van de verzameling geldt	$\exists_{x \in \mathbb{R}} [(-1)^x = 1]$
$\exists!$	unieke existentie-kwantor: voor juist één element geldt	$\exists!_{x \in \mathbb{R}} [(1+x)(1-x) = 1+x^2]$
$e$	grondtal natuurlijke logaritme	$= 2,718\ 281\ 828$
$\pi$	verhouding omtrek en middellijn cirkel	$= 3,141\ 592\ 654$

## 2 Algebra en rekenkunde

### 2.1 Hoofdbewerkingen

#### Wetten bij algebraïsche bewerkingen

Commutatief:  $a + b = b + a$ ;  $ab = ba$

Associatief :  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ;  $a(bc) = (ab)c$

Distributief :  $c(a + b) = ca + cb$

#### Breuken

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

#### Exponenten ( $m, n \in \mathbb{R} \wedge a \in \mathbb{R}$ )

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^m = a^m b^m$$

Voor  $a \neq 0$  geldt:

$$a^0 = 1; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

$0^p (p \in \mathbb{N}^+) = 0$  ( $0^0$  kan soms 1 zijn)

Als  $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+$  heet  $a^m$  een *oneigenlijke macht* van  $a$ .

#### Wortels (hoofdwaarden)

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \quad (n \text{ oneven}, a \geq 0)$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0; \text{ soms } a < 0)$$

#### Ongelijkheden

$$\forall_{p \in \mathbb{R}} [a > b \Leftrightarrow a + p > b + p] \quad \forall_{p \in \mathbb{R}^-} [a > b \Leftrightarrow pa < pb]$$

$$\forall_{p \in \mathbb{R}^+} [a > b \Leftrightarrow pa > pb] \quad \forall_{a, b \in \mathbb{R}^+} \left[ \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow a < b \right]$$

$$\forall_{a, b \in \mathbb{R}^+} [a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2] \quad \forall_{a, b \in \mathbb{R}^-} [a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2]$$

$$\forall_{a, b \in \mathbb{R}} [|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2]$$

## Logaritmen

Twee gebruikelijke grondtallen:

- 10 voor Briggse logaritme, notatie  $\log_{10} x = \log x$
- e voor natuurlijke logaritme, notatie  $\log_e x = \ln x$   
( $e = 2,7182818\dots$ )

$$\log x = (0,4343\dots) \cdot \ln x \text{ en } \ln x = (2,3026\dots) \cdot \log x$$

*Opmerking.* In sommige Amerikaanse literatuur worden de notaties  $\log x$  en  $\ln x$  verwisseld t.o.v. de Europese notatievorm.

$$\log_g a = x \Leftrightarrow g^x = a \text{ of } g^{\log_g a} = a \quad (a \in \mathbb{R}^+; g \in \mathbb{R}^+; g \neq 1)$$

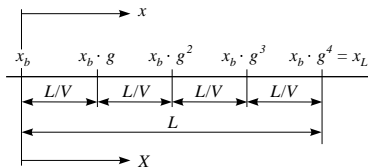
$$\log_g ab = \log_g a + \log_g b \quad (a > 0 \wedge b > 0)$$

$$\log_g \frac{a}{b} = \log_g a - \log_g b \quad (a > 0 \wedge b > 0)$$

$$\log_g a^n = n \log_g a \quad (n \in \mathbb{R} \wedge a > 0)$$

$$\log_g a = \frac{\log_p a}{\log_p g} \quad (p \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \wedge a > 0)$$

## Logaritmische as



uit te zetten waarden voor een grootheid  $x$ , bijv. frequentie in Hz

bijbehorende afstanden op de logaritmische schaal, bijv. in cm

$x$  = uit te zetten grootheid

$X$  = afstand vanaf beginpunt schaal

$x_b$  = beginwaarde uitgezette schaal

$x_L = x_b \cdot g^n$  = eindwaarde uitgezette schaal

$L$  = totale lengte schaal

$$V = \log_g \left( \frac{x_L}{x_b} \right)$$

$g$  = grondtal logaritme

*Uitzetten van de waarde  $x$  ( $x_b \leq x \leq x_L$ ):*

$$X = \frac{L}{V} \log_g \left( \frac{x}{x_b} \right)$$

Aflezten van waarde behorende bij afstand  $X$  vanaf beginpunt:

$$x = x_b \cdot g^{\lfloor X/(L/V) \rfloor}$$

Voorbeeld ( $x_b = 20$  Hz;  $x_L = 320$  Hz;  $g = 2$ ;  $L = 12$  cm)

– Uitzetten van  $x = 90$  Hz:

$$V = \log_g \left( \frac{x_L}{x_b} \right) = \log_2 \left( \frac{320}{20} \right) = 4$$

$$X = \frac{L}{V} \log_g \left( \frac{x}{x_b} \right) = \frac{12}{4} \log_2 \left( \frac{90}{20} \right) \\ = 6,51 \text{ cm}$$

$$\log_2(a) = \frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(2)}$$

– Aflezen van  $x$  op afstand 6,51 cm:

$$x = x_b \cdot g^{\lfloor X/(L/V) \rfloor} = 20 \cdot 2^{\lfloor 6,51/(12/4) \rfloor} = 90 \text{ Hz}$$

### Merkwaardige producten

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + p)(a + q) = a^2 + (p + q)a + pq$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

### Merkwaardige quotiënten

$$\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^{2n-k} b^k$$

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a^{2n-k-1} b^k$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

### Binomium van Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (n, k \in \mathbb{N})$$





## Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden

Eliminatiemethode:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 & | \cdot 2 \\ -2x - 3y = 1 & | \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 6x + 2y = 4 \\ \hline -6x - 9y = 3 \\ \hline -7y = 7 \end{array}$$

Oplossingsverzameling:  $\{(x, y) | x = 1; y = -1\}$

Substitutiemethode:

$$x = (2 - y)/3 \text{ geeft in de tweede vergelijking} \\ -2(2 - y)/3 - 3y = 1 \text{ of } -4 + 2y - 9y = 3 \text{ enz.}$$

## $n$ lineaire vergelijkingen met $n$ onbekenden

Hier een aantal malen de eliminatiemethode toepassen. Zie ook [par. 8.6](#), regel van Cramer.

## Kwadratische vergelijking (vierkantsvergelijking)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Discriminant:  $D = b^2 - 4ac$

Als  $D > 0$  twee verschillende wortels in  $\mathbb{R}$

$D = 0$  twee gelijke wortels in  $\mathbb{R}$

$D < 0$  geen wortels in  $\mathbb{R}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Som van de wortels:  $x_1 + x_2 = -b/a$

Product van de wortels:  $x_1 \cdot x_2 = c/a$

## Hogere machtsvergelijking ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Verkorte schrijfwijze:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Voor  $n > 3$  bestaat er geen algemene expliciete oplossing.

*Wederkerige vergelijking:*

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Te reduceren door  $x + \frac{1}{x} = y$  te stellen.

*Gewone binomiaal-vergelijking:*  $x^n = 1$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

Oplossingsverzameling:

$$x_k = \cos \frac{k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{k \cdot 2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

## 2.3 Rijen en reeksen

**Rekenkundige rijen (r.r.)**

Als  $S_n$  de som is van  $a, a + v, a + 2v, \dots, l$  ( $n$  termen), dan geldt:

$$l = a + (n-1)v \quad S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)v\}$$

$S_n$  is dus een kwadratische functie van  $n$  die de r.r. bepaalt.

**Meetkundige rijen (m.r.)**

Als  $S_n$  de som is van  $a, ar, ar^2, \dots, l$  ( $n$  termen) dan geldt:

$$l = ar^{n-1}, S_n = \frac{rl - a}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

$r$  is de *reden*.

Als  $|r| < 1$ , terwijl  $n$  oneindig groot wordt, geldt:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$$

**Harmonische rijen (h.r.)**

De omgekeerden van de termen van een rekenkundige rij vormen een harmonische rij.

Verband tussen de drie opvolgende termen  $t_k, t_{k+1}$  en  $t_{k+2}$ :

$$(t_k - t_{k+1}) : (t_{k+1} - t_{k+2}) = t_k : t_{k+2}$$

$n^{\circ}$  term  $t_n$ :

$$t_n = \frac{t_1 t_2}{(n-1)t_1 - (n-2)t_2}$$

## Middelevenredigen

Getallen:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$$R = \text{rekenkundig middelevenredige} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$M = \text{meetkundig middelevenredige} = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$$

(elke  $a > 0$ )

$H = \text{harmonisch middelevenredige}$  (elke  $a > 0$ ):

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\text{Voorbeeld: } n = 2; R = \frac{a_1 + a_2}{2}; M = \sqrt{a_1 a_2}$$

$$H = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \Rightarrow M^2 = R \times H$$

## Machtreeksen

Reeksontwikkeling functies (met convergentievoorwaarde).

Algemene vorm:  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ ; of:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (|x| < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (|x| < \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (|x| < \frac{1}{2}\pi)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (|x| < \infty)$$

$$a^x = e^{mx} = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m^2}{2!}x^2 + \frac{m^3}{3!}x^3 + \dots \quad (a > 0, |x| < \infty)$$

$$m = \ln a$$

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\arcsin y = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} + \dots \quad (|y| \leq 1)$$

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \dots \quad (|y| \leq 1)$$

$$\operatorname{arsinh} y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} - \frac{5y^7}{112} + \dots \quad (|y| < 1)$$

$$\operatorname{artanh} y = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \dots \quad (|y| < 1)$$

### Reeks van Maclaurin

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

### Reeks van Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

## 2.4 Functies

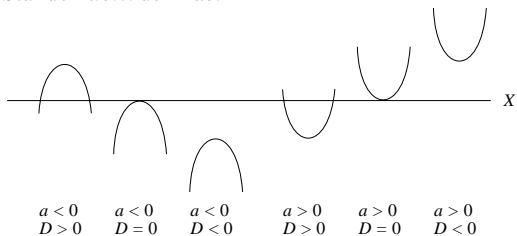
**Lineaire functie:**  $f(x) = ax + b$   
( $a \neq 0$  en  $a, b, x \in \mathbb{R}$ )

$l: y = a_1x + b_1$ ;  $m: y = a_2x + b_2$ .  
 $l \parallel m$  als  $a_1 = a_2$ ;  $l \perp m$  als  $a_1 a_2 = -1$ .

**Kwadratische functie:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$   
( $a \neq 0$  en  $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ )  
 $D = b^2 - 4ac$

De grafiek is een *parabool* met verticale as.

Standen t.o.v. de  $X$ -as:

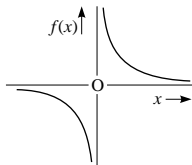


### Gebroken functies

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

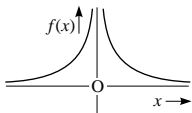
( $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ )

*orthogonale hyperbool*



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

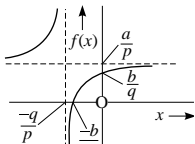
( $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ )



$$f(x) = \frac{ax + b}{px + q}$$

$$\left( a, b, p, q, x \in \mathbb{R}; p \neq 0 \text{ en } \frac{a}{p} \neq \frac{b}{q} \right)$$

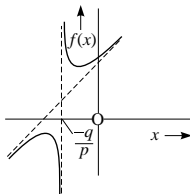
(vershoven) orthogonale hyperbool



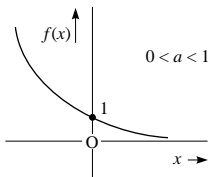
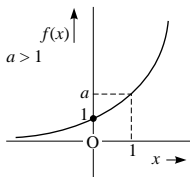
$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$

( $a, b, c, p, q, x \in \mathbb{R}; a \neq 0 \text{ en } p \neq 0$ )

hyperbool

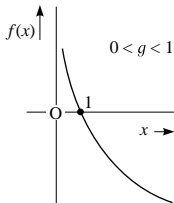
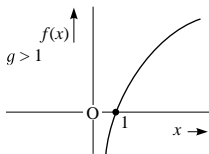


**Exponentiële functie:**  $f(x) = a^x (a \neq 0)$



**Logaritmische functie:**  $f(x) = \log_g x$

( $x \in \mathbb{R}^+; g \in \mathbb{R}^+ | g \neq 1$ )



**Goniometrische functies:** zie par. 4.1.

## 2.5 Limieten

Voor 'lim' kan hieronder worden ingevuld:

$$\lim_{x \rightarrow a}; \lim_{x \downarrow a}; \lim_{x \uparrow a}; \lim_{x \rightarrow \infty}; \lim_{x \rightarrow -\infty}$$

$$\lim C = C, \quad f(x) = C \text{ voor alle } x \in D_f$$

$$\lim C \cdot f(x) = C \cdot \lim f(x)$$

$$\lim \{f(x) + g(x)\} = \lim f(x) + \lim g(x)$$

$$\lim \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

$$\lim \{f(x)/g(x)\} = \lim f(x)/\lim g(x), \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

$$\lim f(g(x)) = f\{\lim g(x)\}, \quad g(x) \text{ continu}$$

### Standaardlimieten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

$(p > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-px} = 0$$

$(p > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)^p}{x^a} = 0$$

$(p \text{ en } a \text{ constant, } a > 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{en} = e^{bc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \text{ bestaat niet}$$

### Regel van l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

als:  $f(a) = g(a) = 0$  of  $f(a) = g(a) = \infty \wedge$   
 $g'(x) \neq 0$  in de omgeving van  $a$

$$\text{Voorbeeld: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$



## 2.6 Complexe rekenwijze

### Complexe getallen

Een *complex getal*  $z$  wordt voorgesteld door  $z = a + bi$ , met  $i^2 = -1$ ,  $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$ . In de elektrotechniek gebruikt men veelal de  $j$  i.p.v. de  $i$  om verwarring met de  $i$  van stroomsterkte te voorkomen. Deze schrijfwijze wordt hier ook verder gehanteerd.

Er geldt:  $j^2 = -1$ ;  $j^3 = -j$ ;  $j^4 = 1$ ;  $j^5 = j$ ; ...

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

$$(a + bj)(c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j$$

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j$$

### Schrijfwijze

$$z = a + bj = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r e^{j\varphi}$$

Reëel deel :  $a = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a + bj)$

Imaginaire deel:  $b = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a + bj)$

Modulus :  $|z| = |a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$   
 $\cos \varphi = a/r$ ;  $\sin \varphi = b/r$ ;  $\tan \varphi = b/a$

Argument :  $\varphi = \arg(z) = \arg(a + bj) = \arctan(b/a)$   
 $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$

*Toegevoegd complex of complex gereduceerde:*

$$z^*(\text{soms } \bar{z}); z = a + bj, z^* = a - bj$$

### Stelling van Euler

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}; \quad \cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

### Stelling van de Moivre

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi = e^{jn\varphi}$$

## Hyperbolische functies

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -j \sin jz; \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos jz$$

$$\tanh z = \sinh z / \cosh z$$

$$\sinh jz = j \sin z; \quad \cosh jz = \cos z$$

$$\tanh jz = j \tanh z; \quad \tanh z = j \tan jz$$

## Complexe voorstelling sinusvormige grootheden

$a = \hat{a} \cos(\omega t + \alpha) = A \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$  is voor te stellen als:

– Zonder tijdsindicatie:

$$\text{complexe amplitude: } \hat{\underline{a}} = \hat{a} e^{j\alpha} = \hat{a} \exp(j\alpha)$$

$$\text{complexe effectieve waarde: } \underline{A} = A e^{j\alpha}$$

– Met tijdsindicatie:

$$\text{complexe momentane waarde: } \underline{a} = \hat{a} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

Voorbeelden:

$$a = 10 \cos(\omega t + \frac{5}{12}\pi)$$

$$b = 5 \cos(\omega t + \frac{1}{6}\pi)$$

$$\varphi_{ab} = \alpha - \beta = \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

$$c = 10 \cos(\omega t - \frac{4}{5}\pi)$$

$$d = 5 \cos(\omega t + \frac{2}{5}\pi)$$

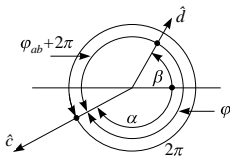
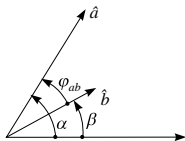
$$\varphi_{cd} = \alpha - \beta = -\frac{4}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi = -\frac{6}{5}\pi$$

$$a \rightarrow \hat{\underline{a}} = 10 e^{j(5\pi/12)}$$

$$\underline{A} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j(5\pi/12)}$$

$$\underline{a} = 10 e^{j[\omega t + (5\pi/12)]}$$

Analoog:  $b$ ,  $c$  en  $d$ .



## 2.7 Afronden en nauwkeurigheid

### Afronden

Op  $n$  significante cijfers afronden: is het  $(n + 1)$ ste cijfer  $\geq 5$  dan omhoog afronden, anders omlaag.

Voorbeeld. In notatie met drie significante cijfers wordt:

- 5,135 of 5,138 na afronding 5,14;
- 5,314 na afronding 5,31.

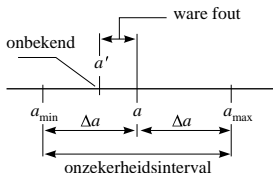
### Nauwkeurigheid

Werkelijke waarde :  $a'$

Gevonden waarde :  $a$

Maximale absolute fout:  $\Delta a$

Relatieve fout :  $\delta a = \frac{\Delta a}{a}$



### Rekenregels

$$\Delta(a_1 \pm a_2 \pm \dots a_n) = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots \Delta a_n$$

$$\delta(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = \delta(a_1) + \delta(a_2) + \dots \delta(a_n)$$

$$\delta(a/b) = \delta(a) + \delta(b)$$

Wanneer  $f = f(a_1, a_2, \dots a_n)$  dan geldt:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta f}{\delta a_i} \right| \Delta a_i; \quad \delta f = \frac{\Delta f}{f}$$

$\Delta f$  van afronden op één significant cijfer.

Begint  $\Delta f$  met een 1, dan afronden op twee cijfers.

Afronden  $f$  laten bepalen door  $\Delta f$ .

Voorbeeld:  $f = 3,168 \pm 0,41$  wordt  $3,2 \pm 0,4$ .

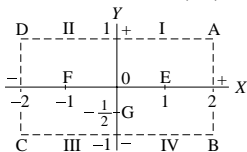
# 3 Meetkunde

## 3.1 Coördinaten en hoeken

### Rechthoekige of Cartesische coördinaten

Twee assen: horizontale as of  $X$ -as, verticale as of  $Y$ -as.

Vier kwadranten: I, II, III, IV.



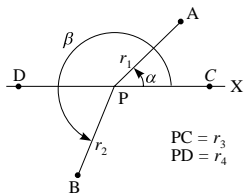
Punten worden aangegeven door 2 coördinaten; de eerste gemeten langs de  $X$ -as (*abscis*) en de tweede langs de  $Y$ -as (*ordinaat*).

$A(2, 1)$ ;  $B(2, -1)$ ;  $C(-2, -1)$ ;  $D(-2, 1)$

$O(0, 0)$ ;  $E(1, 0)$ ;  $F(-1, 0)$ ;  $G(0, -\frac{1}{2})$

### Poolcoördinaten

Eén horizontale as en een punt  $P$  daarop: de pool.



$A(r_1, \alpha)$

$B(r_2, \beta)$

$C(r_3, 0^\circ)$  of  $(r_3, k \cdot 2\pi)$   $k \in \mathbb{N}$

$D(r_4, 180^\circ)$

$PC = r_3$   
 $PD = r_4$

### Hoeken

Rechte hoek :  $90^\circ$

Scherpe hoek :  $< 90^\circ$

Stompe hoek :  $> 90^\circ$

Complement : aanvulling tot  $90^\circ$

Supplement : aanvulling tot  $180^\circ$

## 3.2 Driehoeken

Zie ook [par. 4.2 Trigonometrie](#).

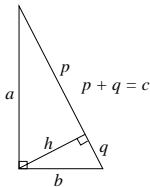
Algemeen geldt: som van de hoeken is  $180^\circ$ .

### Rechthoekige driehoek

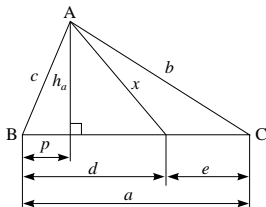
Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = pq; \quad b^2 = qc; \quad ab = hc$$



### Scheefhoekige driehoek



Projectiestelling:

$$b^2 = a^2 + c^2 \pm 2ap \text{ (+ als } \angle B \text{ stomp; - als } \angle B \text{ scherp is)}$$

Stelling van Stewart:

$$x^2 \times a = b^2 \times d + c^2 \times e - ade$$

Hoogtelijn op zijde a:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ waarin } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Zwaartelijn voor zijde a

$$m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Bissectrice van hoek A:

$$d_a^2 = bc - rs$$

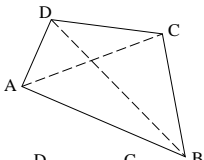
waarin:  $r$  en  $s$  de stukken waarin  $d_a$  de zijde  $a$  verdeelt. Als  $r$  aan  $c$  grenst is  $r:s = c:b$

### 3.3 Vierhoeken

#### Algemeen

Som van de hoeken  $360^\circ$

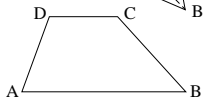
Twee diagonalen: AC en DB



#### Trapezium

2 zijden evenwijdig

$$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^\circ$$



#### Parallelogram

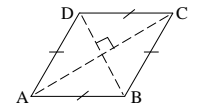
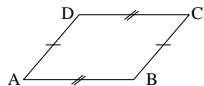
Zijden 2 aan 2 evenwijdig

$$AB = DC; AD = BC:$$

$$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C =$$

$$\angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$$

Diagonalen delen elkaar middendoor.



#### Ruit

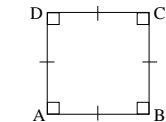
Parallelogram met 4 gelijke zijden

Diagonalen loodrecht op elkaar.



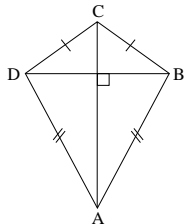
#### Rechthoek

Parallelogram met 4 rechte hoeken.



#### Vierkant

Parallelogram met 4 gelijke zijden en 4 rechte hoeken.



#### Vlieger

Aanliggende zijden twee aan twee gelijk. Diagonalen loodrecht op elkaar.

### 3.4 Veelhoeken

#### Algemeen

Een  $n$ -hoek is een willekeurige veelhoek met  $n$  zijden.

Som van de hoeken van een  $n$ -hoek:  $(n - 2)180^\circ$

Aantal diagonalen in een  $n$ -hoek:  $\frac{1}{2}n(n - 3)$ .

#### Regelmatige veelhoeken

Van een regelmatige veelhoek zijn de  $n$  hoeken gelijk (dus elk

gelijk aan  $\frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ$ ) en zijn de  $n$  zijden gelijk. In en om een

regelmatige  $n$ -hoek kan een cirkel beschreven worden.

Straal omgeschreven cirkel is  $R$ .

Zijde regelmatige  $n$ -hoek is  $a_n$ .

Dan is:

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$a_6 = R; \quad a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad a_{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1)$$

$$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

#### Gulden snede (u.m. verdeling)

De gulden snede verdeelt een lijnstuk  $a$  in twee delen, waarvan het grootste deel  $x$  middelevenredig is tussen het kleinste deel  $(a - x)$  en de gehele lijn  $a$ , dus  $x^2 = (a - x)a$ .

$x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$  of ongeveer  $0,618a$ .

$a_{10}$  = grootste stuk van de volgens de gulde snede verdeelde straal  $R$  van de omgeschreven cirkel.

Andere benaming: verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden (of u.m. verdeling).

### 3.5 Cirkels

#### Algemeen

AB, CD, CS zijn koorden.

QS en QT zijn raaklijnen;  $QS \perp MS$ .

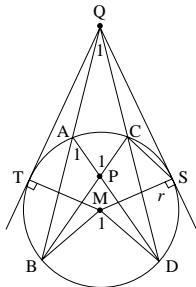
$$\angle A_1 = \frac{1}{2}bg BD/r$$

$$\angle M_1 = bg BD/r$$

$$\angle P_1 = \frac{1}{2}(bg AC + bg BD)/r$$

$$\angle Q_1 = \frac{1}{2}(bg BD - bg AC)/r$$

$$\angle CSQ = \frac{1}{2}bg CS/r$$



$QA \times QB = QC \times QD = QS^2 = QM^2 - r^2 =$  macht van Q ten opzichte van cirkel  $(M, r)$

$PA \times PD = PC \times PB =$  macht van P ten opzichte van cirkel  $(M, r)$ .

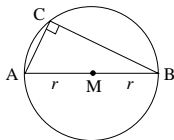
$QS = QT$ .

AB is een middellijn van cirkel  $(M, r)$ .

$AM = MB = r =$  straal van de cirkel  $(M, r)$ .

$\angle ACB = 90^\circ (= \frac{1}{2}bg AB)$ .

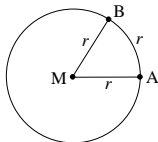
$\angle A = \frac{1}{2}bg BC$ ;  $\angle B = \frac{1}{2}bg AC$ .



Lengte boog  $AB = r$

$\angle AMB = 1$  radiaal

$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,8''$



Oppervlakte sector

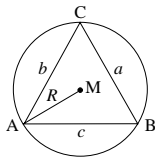
met sectorhoek van  $p$

radialen  $= \frac{1}{2}pr^2$

#### Omgeschreven cirkel driehoek

$$R = \frac{abc}{4O}$$

$O =$  oppervlakte  $\triangle ABC$



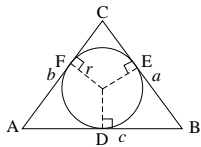


### Ingeschreven cirkel driehoek

$$r = \frac{O}{s}$$

$$AD = AF = s - a$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

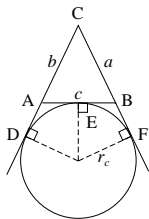


### Aangeschreven cirkel driehoek

$$r_c = \frac{O}{s - c}$$

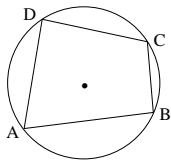
$$CD = CF = s$$

$$AE = AD = s - b$$



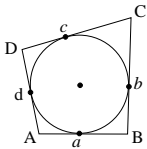
### Omgeschreven cirkel vierhoek

Om een vierhoek ABCD, waarvoor geldt  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$  ( $= 180^\circ$ ) kan een cirkel worden beschreven. ABCD is dan een *koorden-vierhoek*. Hieraan voldoen o.a.: rechthoek, vierkant, en gelijkbenig trapezium.



### Ingeschreven cirkel vierhoek

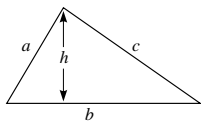
In een vierhoek ABCD, waarvoor geldt  $AB + CD = BC + AD$  kan een cirkel worden beschreven. ABCD is een *raaklijenvierhoek*. Hieraan voldoen o.a.: vierkant, ruit, vlieger.



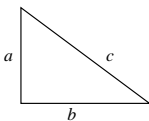
### 3.6 Omtrek, oppervlakte, inhoud

Tabel 3.1 Vlakken

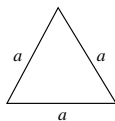
figuur (nr.)	omtrek	oppervlakte
1 Driehoek	$a + b + c = 2s$	$\frac{1}{2}bh$ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
2 Rechth. driehoek	$a + b + c$	$\frac{1}{2}ab$
3 Gelijkz. driehoek	$3a$	$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$
4 Vierhoek	$a + b + c + d$	Som van 2 driehoeken
5 Trapezium	$a + b + c + d$	$\frac{1}{2}(d + b)h$
6 Parallelogram	$2(a + b)$	$bh$
7 Ruit	$4a$	$ah$ of $\frac{1}{2}$ product diagonalen
8 Rechthoek	$2(a + b)$	$ab$
9 Vierkant	$4a$	$a^2$ of $\frac{1}{2}$ product diagonalen



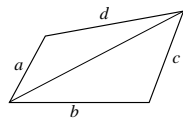
1



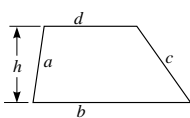
2



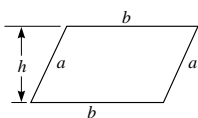
3



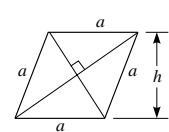
4



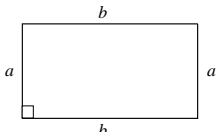
5



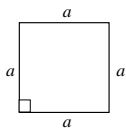
6



7



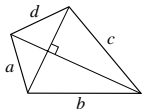
8



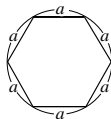
9

Tabel 3.1 (vervolg)

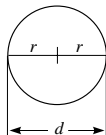
figuur (nr.)	omtrek	oppervlakte
10 Vierhoek; diag. $\perp$	$a + b + c + d$	$\frac{1}{2}$ prod. diag.
11 Regelm. zeshoek	$6a$	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$
12 Cirkel	$2\pi r$ of $\pi d$	$\pi r^2$ of $\frac{1}{4}\pi d^2$
13 Sector van $p^\circ$	$2r + \frac{p}{360}2\pi r$	$\frac{p}{360}\pi r^2$
14 Segment	$k + bg$	sector minus driehoek
15 Ellips	$\approx 2\pi a \frac{\sqrt{1 + \frac{35}{72}m^2 + \frac{2}{15}m^4}}{1 + m}$ $m = (a - b)/(a + b)$	$\pi ab$



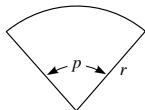
10



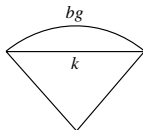
11



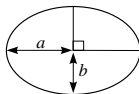
12



13



14



15

\* Dit is een benadering! Voor de omtrek  $s$  van een ellips geldt ( $a > b$ ):

$$s = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx, \quad \text{met } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\text{Met } x = a \sin \varphi \text{ wordt: } s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$  is een *elliptische integraal* die met  $e$  als parameter is getabelleerd

Tabel 3.2 Lichamen

figuur (nr.)	betekenis letters (tenzij anders vermeld: $A_g$ = grondvlak; $h$ = hoogte; $N$ = normaal-doorsnede)	inhoud $V$ oppervlak $A$ manteloppervlak $A_m$
--------------	---	--

1 Rechthoekig parallellepipedum

2 Kubus  
 $a$  = ribbe  
 $d$  = lichaamsdiagonaal

3 Rechthoekig parallellepipedum  
 $a, b$  en  $c$  de ribben in één hoekpunt  
 $d$  = lichaamsdiagonaal

4 Scheef prisma  
 $a$  = opstaande ribbe

5 Afgeknut driezijdig prisma  
 $a, b$  en  $c$  de opstaande ribben

6 Piramide

7 Afgeknutte piramide  
 $A_g$  en  $A_b$  = eindvlakken

$$V = A_g h$$

$$V = a^3$$

$$A = 6a^2$$

$$d^2 = 3a^2$$

$$V = abc$$

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

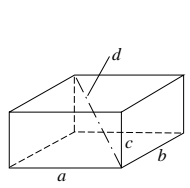
$$V = A_g h \text{ of } Na$$

$$A_m = a \times \text{omtrek } N$$

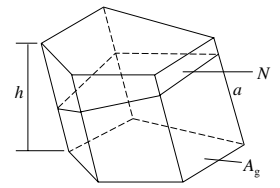
$$V = \frac{1}{3}(a + b + c)N$$

$$V = \frac{1}{3}A_g h$$

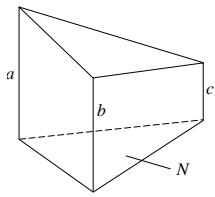
$$V = \frac{1}{3}h(A_g + A_b + \sqrt{A_g A_b})$$



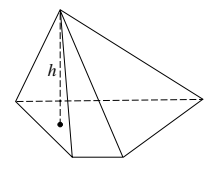
3



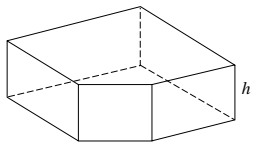
4



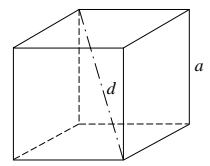
5



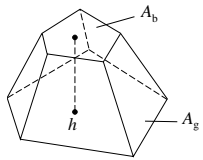
6



1



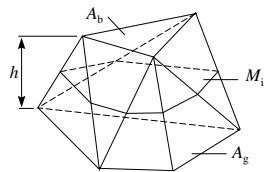
2



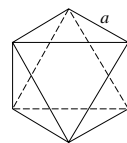
7

Tabel 3.2 (vervolg)

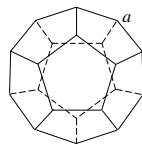
figuur (nr.)	betekenis letters (tenzij anders vermeld: $A_g$ = grondvlak; $h$ = hoogte; $N$ = normaal-doorsnede)	inhoud $V$ oppervlakte $A$ manteloppervlakte $A_m$
8 Prismoïde	$A_b$ = bovenvlak $M_i$ = midden-doorsnede	$V = \frac{1}{6}h(A_g + A_b + 4M_i)$
9 Octaëder (8 gelijkz. driehoeken)	$a$ = ribbe	$V = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$ $A = 2a^2\sqrt{3}$
10 Dodecaëder (12 gelijkz. vijfhoeken)	$a$ = ribbe	$V = \frac{1}{4}a^3(15 + 7\sqrt{5})$ $A = 3a^2\sqrt{5}(5 + 2\sqrt{5})$
11 Icosaëder (20 gelijkz. driehoeken)	$a$ = ribbe	$V = \frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$ $A = 5a^2\sqrt{3}$
12 Cilinder		$V = A_g h$
13 Rechte cirkelcilinder	$r$ = straal grondvlak	$V = \pi r^2 h$ $A_m = 2\pi r h$ $A = 2\pi r(r + h)$
14 Holle cilinder (buis)	$R$ = uitwendige straal $r$ = inwendige straal $d = R - r$ = dikte	$V = \pi h(R^2 - r^2)$ $= \pi h d(2R - d)$ $= \pi h d(2r + d)$
15 Rechte cirkelkegel	$A_g$ = grondvlak $r$ = straal grondvlak $s$ = beschrijvende lijn	$V = \frac{1}{3}A_g h$ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $s = \sqrt{(r^2 + h^2)}$ $A_m = \pi r s$
16 Afgeknotte cirkelkegel	$R$ = straal grondvlak $r$ = straal bovenvlak $s$ = beschrijvende lijn	$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ $s = \sqrt{[h^2 + (R - r)^2]}$ $A_m = \pi s(R + r)$



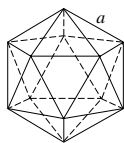
8



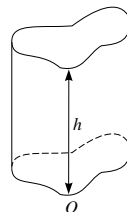
9



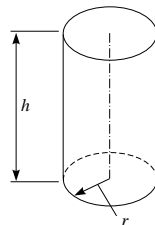
10



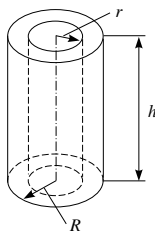
11



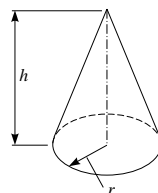
12



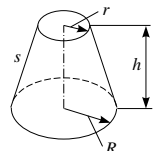
13



14



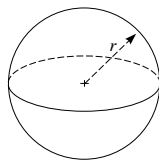
15



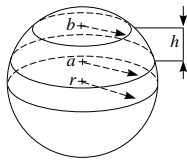
16

Tabel 3.2 (vervolg)

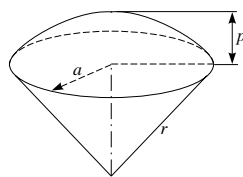
figuur (nr.)	betekenis letters (tenzij anders vermeld: $A_g$ = grondvlak; $h$ = hoogte; $N$ = normaal-doorsnede)	inhoud $V$ oppervlakte $A$ manteloppervlakte $A_m$
17 Bol	$r$ = straal $d = 2r$ = diameter	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $= \frac{1}{6}\pi d^3$ $A = 4\pi r^2 = \pi d^2$
18 Holle Bol	$R$ = uitwendige straal $r$ = inwendige straal $D$ = uitwendige diameter $d$ = inwendige diameter	$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ $= \frac{1}{6}\pi(D^3 - d^3)$
19 Bolschijf	$r$ = straal bol $a$ en $b$ stralen der platte vlakken	$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$ $A_m = 2\pi r h$
20 Bolsector	$r$ = straal bol $p$ = pijl $a$ = straal grondvlak segment	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 p$ $A = \pi r(2p + a)$
21 Bolsegment	$r$ = straal bol $p$ = pijl $a$ = straal grondvlak	$V = \frac{1}{6}\pi p(3a^2 + p^2)$ $= \frac{1}{3}\pi r^2(3r - p)$ $A_m = 2\pi r p$ $= \pi(a^2 + p^2)$
22 Ellipsoïde	$a, b$ en $c$ de drie halve assen	$V = \frac{4}{3}\pi abc$
23 Omwentelings- paraboloïde	$r$ = straal grondvlak	$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$
24 Ring	$r$ = straal doorsnede $d$ = diameter doorsnede $D = 2R$ = diameter neutrale lijn	$V = 2\pi^2 R r^2$ $= \frac{1}{4}\pi^2 D d^2$ $A = 4\pi^2 R r$ $= \pi^2 D d$
25 Vat	$d$ = grootste middellijn $d_1$ = bodemmiddellijn	$V = \frac{1}{12}\pi h(2d^2 + d_1^2)$



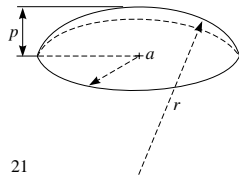
17



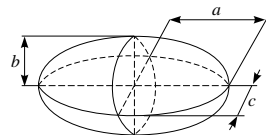
19



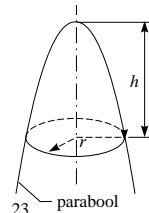
20



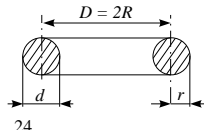
21



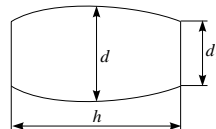
22



23



24

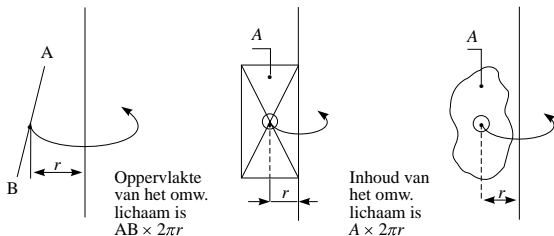


25

## Regels van Guldin

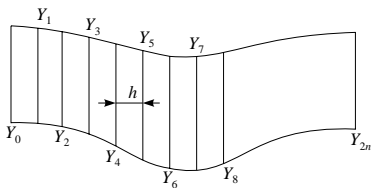
- 1 Wanneer een vlakke kromme of rechte lijn wentelt om een in het vlak van die lijn gelegen as, die de lijn *niet* snijdt, dan is de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak gelijk aan het product van de lengte van de roterende lijn en de weg, die het *oppervlakte-middelpunt* (of *zwaartepunt*) van die lijn doorloopt.
- 2 Wanneer een gesloten vlakke figuur wentelt om een in het vlak van die figuur gelegen as, die de figuur *niet* snijdt, dan is de inhoud van het omwentelingslichaam gelijk aan het product van de oppervlakte  $A$  van de wentelende figuur en de weg, die het *oppervlakte-middelpunt* (of *zwaartepunt*) van de figuur doorloopt.

Voorbeelden (zie ook [par. 6.5](#)):



De oppervlakte  $O$  van een *omwentelingslichaam* = de som van de oppervlakten beschreven door de zijden van de wentelende figuur.

## Oppervlakte en inhoud van onregelmatige figuren



*Regel van Simpson voor oppervlakten.* Verdeel de figuur door verticalen  $Y$  in een *even* aantal ( $2n$ ) *even brede* ( $h$ ) stroken. Bepaal:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= Y_0 + Y_{2n} \\ S_2 &= 4(Y_1 + Y_3 + \dots + Y_{2n-1}) \\ S_3 &= 2(Y_2 + Y_4 + \dots + Y_{2n-2}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{oppervlakte} \\ A \approx \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + S_3) \end{array}$$

*Trapeziumregel:*

$$A \approx \left( \frac{Y_0 + Y_{2n}}{2} + Y_1 + Y_2 + Y_3 \dots + Y_{2n-1} \right) \cdot h$$

*Opmerking.* De trapeziumregel is ook toepasbaar op een oneven aantal stroken.

*Regel van Simpson voor inhoud omwentelingslichaam:*

$$V \approx \frac{1}{3}d \{ A_0 + A_{2n} + 4(A_1 + A_3 + \dots + A_{2n-1}) + 2(A_2 + A_4 + \dots + A_{2n-2}) \}$$

waarin:  $A_n$  = oppervlakte van snijvlak  $Y_n$

## 4 Gonio- en trigonometrie, boldriehoeksmeting

### 4.1 Goniometrie

#### Goniometrische verhoudingen

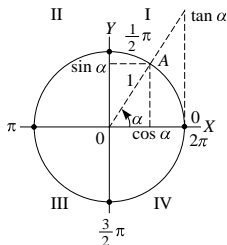
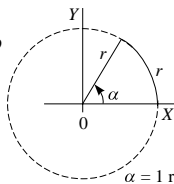
*Hoeken* worden in aangegeven richting gemeten. Eenheid is **graad** met  $360^\circ$  in volledige cirkel óf eenheid is **radiaal** met  $2\pi$  radialen in cirkel. Omrekening met  $180^\circ = \pi$  radialen  $\approx 3,1416$ ;  $1^\circ \approx 0,01745$  rad;  $1$  rad  $\approx 57,296^\circ$

*Eenheidscirkel* (straal 1) en punt

$A(x_A, y_A)$ :

$\sin \alpha = y_A$  tussen  $-1$  en  $+1$

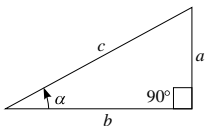
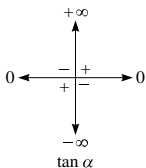
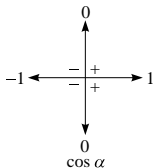
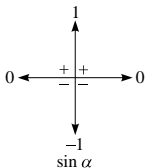
$\cos \alpha = x_A$  tussen  $-1$  en  $+1$





$$\tan \alpha = \frac{y_A}{x_A}, \text{ elke waarde mogelijk}$$

Periode:  $\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$   
 $\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$   
 $\tan \alpha = \tan(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \tan(\alpha + k \cdot \pi)$

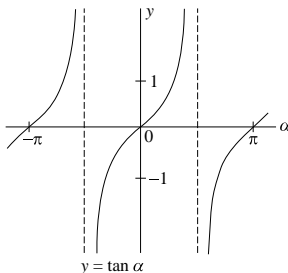
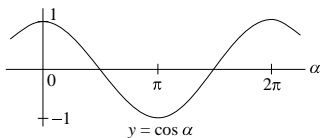
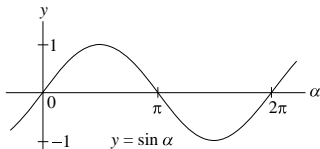


$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{cosec } \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \text{sec } \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{cot } \alpha = \frac{b}{a}$$

## Basisvormen goniometrische relaties



## Basisformules

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha;$$

$$\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1; \quad \cos \alpha \sec \alpha = 1; \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sec \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sec \alpha}$$

## Reductieformules

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha; & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha; \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha; & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \\ \sin(\pi/2 \pm \alpha) &= \cos \alpha; & \cos(\pi/2 \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha; \\ \tan(\pi/2 \pm \alpha) &= \mp \cot \alpha; & \cot(\pi/2 \pm \alpha) &= \mp \tan \alpha \\ \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha; & \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos \alpha; \\ \tan(\pi \pm \alpha) &= \pm \tan \alpha; & \cot(\pi \pm \alpha) &= \pm \cot \alpha \end{aligned}$$

Tabel 4.1 Bijzondere waarden goniometrische relaties

	kwadranten				hoeken						
	I	II	III	IV	$0/2\pi$ $0^\circ/360^\circ$	$\pi/6$ $30^\circ$	$\pi/4$ $45^\circ$	$\pi/3$ $60^\circ$	$\pi/2$ $90^\circ$	$\pi$ $180^\circ$	$3\pi/2$ $270^\circ$
sin	+	+	-	-	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1
cos	+	-	-	+	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	+	-	+	-	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
cot	+	-	+	-	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\pm \infty$	0

## Formules met twee hoeken

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}; \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}; \quad \cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

### Formules voor dubbele en halve hoek

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = (3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = -(3 - 4 \cos^2 \alpha) \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 - \tan^2 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \tan \alpha$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}; \quad \cos \frac{1}{2} \alpha = + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$$

$$\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$\sin(n\alpha)$  en  $\cos(n\alpha)$  zijn ook te berekenen met de stelling van *De Moivre* (zie par. 2.6) samen met  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

### Inverse functies

#### (arcfuncties, boogfuncties, cyclometrische functies)

$$\text{Uitkomst arcsin } x: \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$

$$\text{Uitkomst arccos } x: [0, \pi]$$

$$\text{Uitkomst arctan } x: \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{1}{2}\pi$$

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

## Goniometrische vergelijkingen

$\sin \alpha = \sin \beta$  geeft  $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$  of  $\alpha = (\pi - \beta) + k \cdot 2\pi$

$\cos \alpha = \cos \beta$  geeft  $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$  of  $\alpha = -\beta + k \cdot 2\pi$

$\tan \alpha = \tan \beta$  geeft  $\alpha = \beta + k \cdot \pi$

Oplossingsmethoden:

- Willekeurige vorm herleiden tot basisvorm.
- Niet-lineaire vorm door middel van substitutie terugbrengen tot lineaire vorm.
- Lineaire vorm  $a \cos x + b \sin x$  schrijven als

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \text{ met } \tan \varphi = \frac{b}{a} \text{ en } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## 4.2 Trigonometrie (vlakke driehoeksmeting)

### Rechthoekige driehoeken

Berekeningen in de rechthoekige (en in gelijkbenige) driehoeken kunnen worden uitgevoerd met de stelling van Pythagoras (zie par. 3.2) en de definities van de zes goniometrische verhoudingen (zie par. 4.1).

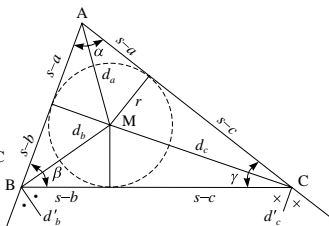
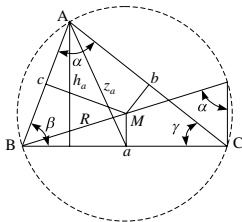
### Scheefhoekige driehoeken

$$\text{Sinusregel: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$R$  is straal omgeschreven cirkel  $\triangle ABC$ .

$$\text{Cosinusregel: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\text{Tangensregel: } \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{a + b}{a - b}$$



*Oppervlakte*  $\Delta ABC = O$

$$O = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

waarin:  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$$O = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

*Hoogtelijnen* ( $h_a$ ; id.  $h_b, h_c$ ):

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

$$= 2R \sin \beta \sin \gamma$$

$$= \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

*Zwaartelijnen* ( $z_a$ ; id.  $z_b, z_c$ ):

$$z_a^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}bc \cos A$$

*Binnenbissectrices* ( $d_a$ ; id.  $d_b, d_c$ ):

$$d_a = \frac{c \sin \beta}{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \beta)} = \frac{b \sin \gamma}{\sin(\frac{1}{2}\alpha + \gamma)} = \frac{2bc \cos \frac{1}{2}\alpha}{b+c}$$

*Buitenbissectrices* ( $d'_a$ ; id.  $d'_b, d'_c$ ):

$$d'_a = -\frac{b \sin \gamma}{\cos(\frac{1}{2}\alpha + \gamma)} = \frac{2bc \sin \frac{1}{2}\alpha}{b-c}$$

*Straal omgeschreven cirkel*  $R$ :

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

$$R = \frac{abc}{4O} \quad O = \text{oppervlakte } \Delta ABC$$

*Straal ingeschreven cirkel*  $r$ :

$$r = \frac{c \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = (s-a) \tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{O}{s}$$

*Straal aangeschreven cirkel*<sup>1)</sup> *aan zijde*  $a$ :

$$r_a = \frac{a \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} = (s-b) \cot \frac{1}{2}\gamma = s \tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{O}{s-a}$$

<sup>1)</sup> De aangeschreven cirkel aan zijde  $a$  heeft als middelpunt het snijpunt van de buitenbissectrices  $d'_b$  en  $d'_c$ .

Berekening hoeken  $\Delta ABC$ :

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

### Oppervlakten vierhoeken

Zijden:  $a, b, c, d$ .

Hoeken:  $A, B, C, D$ .

Diagonalen:  $p, q$ ;

hoek tussen  $p$  en  $q$  is  $\varphi$ .

Willekeurige vierhoek:

$$O = \frac{1}{2}pq \sin \varphi$$

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{1}{2}(A+C)}$$

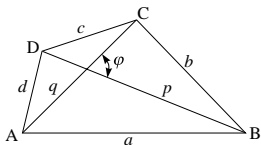
waarin:  $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

Koördenvierhoek:

$$O = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \frac{1}{2}(ad+bc) \sin \varphi$$

Raaklijnvierhoek:  $O = \sqrt{abcd} \cdot \sin \frac{1}{2}(A+C)$

Bicyclische vierhoek<sup>1)</sup>:  $O = \sqrt{abcd}$



## 4.3 Boldriehoeksmeting

### Rechthoekige boldriehoek

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad \tan a = \cos \beta \cdot \tan c$$

$$\cos c = \cot \alpha \cdot \cot \beta \quad \tan a = \tan \alpha \cdot \sin b$$

$$\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c \quad \cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta$$

*Regel van Neper.* Laat men in de rechthoekige boldriehoek de rechte hoek buiten beschouwing en vervangt men de beide rechthoekszijden door hun complementen dan is de cosinus van een element gelijk aan het product van de cotangenten van de beide aanliggende elementen of gelijk aan het product van de sinussen van de beide afliggende elementen.

<sup>1)</sup> Vierhoek die zowel raaklijn- als koördenvierhoek is (dus zowel een in- als omschreven cirkel), bijv. een vierkant.

In de rechthoekige boldriehoek zijn een rechthoekszijde en de overstaande hoek altijd gelijksoortig.

### Scheefhoekige boldriehoek

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (\text{sinusregel})$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a + b)}{\tan \frac{1}{2}(a - b)} \quad (\text{tangensregel})$$

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (1 \text{ ecos.-regel})$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \quad (2 \text{ ecos.-regel})$$

*Formules van Euler:*

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s \cdot \sin(s-a)}} = \frac{n}{\sin s \cdot \sin(s-a)}$$

$$n = \sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}$$

$$\sin \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-\alpha)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}} \quad S = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\cos \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(S-\beta) \cdot \cos(S-\gamma)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}}$$

$$\tan \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos S \cdot \cos(S-\alpha)}{\cos(S-\beta) \cdot \cos(S-\gamma)}} = \frac{N}{\cos(S-\beta) \cdot \cos(S-\gamma)}$$

$$N = \sqrt{-\cos S \cdot \cos(S-\alpha) \cdot \cos(S-\beta) \cdot \cos(S-\gamma)}$$

*Formules van Delambre:*

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}c} \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a + b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}c} \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a + b)}{\sin\frac{1}{2}c}$$

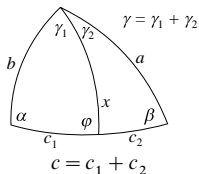
*Analogieën van Neper:*

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cot\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}(a + b)} \qquad \frac{\tan\frac{1}{2}(a + b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cot\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a - b)}{\sin\frac{1}{2}(a + b)} \qquad \frac{\tan\frac{1}{2}(a - b)}{\tan\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

*Eerste stelling van Stewart:*

$$\cos x \cdot \sin c = \cos a \cdot \sin c_1 + \cos b \cdot \sin c_2$$



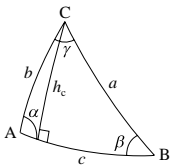
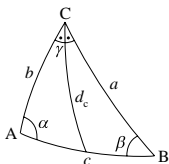
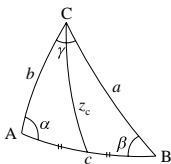
*Tweede stelling van Stewart:*

$$\cos \varphi \cdot \sin \gamma = \cos \beta \cdot \sin \gamma_1 - \cos \alpha \cdot \sin \gamma_2$$

$$\cos z_c = \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{1}{2}c}$$

$$\cot d_c = \frac{\cot a + \cot b}{2 \cos \frac{1}{2}\gamma}$$

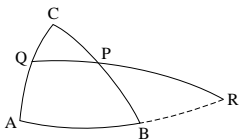
$$\sin h_c = \frac{2n}{\sin c} = \frac{2N}{\sin \gamma}$$





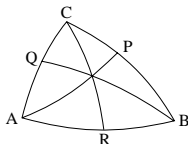
Stelling van Menelaos:

$$\frac{\sin PB}{\sin PC} \cdot \frac{\sin QC}{\sin QA} \cdot \frac{\sin RA}{\sin RB} = 1$$



Stelling van Ceva:

$$\frac{\sin PB}{\sin PC} \cdot \frac{\sin QC}{\sin QA} \cdot \frac{\sin RA}{\sin RB} = -1$$



Als  $E = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ :

$$\tan \frac{1}{4}E = \sqrt{\tan \frac{1}{2}s \cdot \tan \frac{1}{2}(s-a) \cdot \tan \frac{1}{2}(s-b) \cdot \tan \frac{1}{2}(s-c)} \quad (\text{Lhuilier})$$

$$\cot \frac{1}{2}E = \frac{\cot \frac{1}{2}a \cdot \cot \frac{1}{2}b + \cos \gamma}{\sin \gamma}$$

$$\sin \frac{1}{2}E = \frac{\sin \frac{1}{2}a \cdot \sin \frac{1}{2}b \cdot \sin \gamma}{\cos \frac{1}{2}c} \left( = \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2}a \cdot \cos \frac{1}{2}b \cdot \cos \frac{1}{2}c} \right) \quad (\text{Cagnoli})$$

$R$  en  $r$  zijn de stralen op het boloppervlak van de omgeschreven, resp. ingeschreven cirkel.

$$\tan R = \frac{\tan \frac{1}{2}c}{\cos(S-\gamma)} = \frac{\sin \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}a \cdot \cos \frac{1}{2}b \cdot \sin \gamma} \quad (\text{voor } n, s, N \text{ en } S \text{ zie pa. } 3)$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cdot \sin \frac{1}{2}b \cdot \sin \frac{1}{2}c}{n} = \frac{-\cos S}{N}$$

$$\cot r = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{1}{2}\beta \cdot \sin c} = \frac{\cot \frac{1}{2}\gamma}{\sin(s-c)}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos \frac{1}{2}\beta \cdot \cos \frac{1}{2}\gamma}{N} = \frac{\sin s}{n}$$

## 5 Analytische meetkunde

Zie ook [par. 2.4](#).

### Rechte

Algemene vergelijking:

$$Ax + By + C = 0 \text{ of: } y = mx + n$$

waarin:

$m = \tan \alpha$  (richtingscoëfficiënt)

$\alpha$  = hoek die de rechte maakt met de  $X$ -as

$n$  = dat deel van de  $Y$ -as dat door de rechte wordt 'afgesneden'

Rechte die delen  $a$  en  $b$  van  $X$ -as en  $Y$ -as afsnijdt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Rechte door punt  $(x_1, y_1)$  met richtingscoëfficiënt  $m$ :

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Rechte door de punten  $(x_1, y_1)$  en  $(x_2, y_2)$ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

### Cirkel

Middelpuntsvergelijking (middelpunt in  $O$ ; straal  $r$ ):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Cirkel met middelpunt  $M(p, q)$  en straal  $r$ :

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Raaklijn aan deze cirkel in punt  $(x_1, y_1)$ :

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$$

## Ellips

Vergelijking op de symmetrieassen (middelpunt in oorsprong):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vergelijking bij middelpunt  $(x_0, y_0)$ , met symmetrieassen // coördinaatassen:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Brandpunten:  $(x_0 \pm c, y_0)$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad \text{excentriciteit } e = \frac{c}{a} (< 1)$$

Richtlijnen:  $x = x_0 \pm \frac{a^2}{c}$

Parameter:  $p = \frac{b^2}{a}$  (halve koorde door brandpunt  $\perp$  hoofdas)

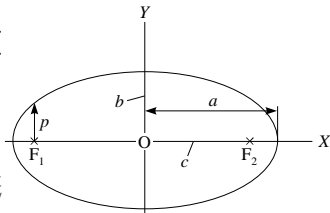
Raaklijn in  $(x_1, y_1)$ :

$$\frac{(x_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

Normaal in  $(x_1, y_1)$ :

$$\frac{(x_1 - x_0)(y - y_1)}{a^2} = \frac{(y_1 - y_0)(x - x_1)}{b^2}$$

Subnormaal<sup>1)</sup>:  $\frac{b^2}{a^2}(x_1 - x_0)$



<sup>1)</sup> De *subnormaal* is de (grootte van de) projectie op de X-as van de normaal tussen zijn voetpunt en zijn snijpunt met de X-as.

Toegevoegde richting (bij vergelijking op de symmetrie-assen):

$$m \cdot m' = -\frac{b^2}{a^2} \quad (m' \text{ is toegevoegde richtingscoëff.})$$

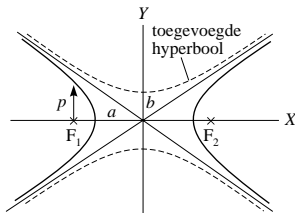
### Hyperbool

Vergelijking op de symmetrie-assen (middelpunt in oorsprong):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Toegevoegde hyperbool:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$



Vergelijking bij middelpunt  $(x_0, y_0)$ , met symmetrie-assen // coördinaatassen:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Asymptoten:  $\frac{(y - y_0)}{b} = \pm \frac{(x - x_0)}{a}$

Vergelijking op de asymptoten:  $(x - x_0)(y - y_0) = \pm \frac{1}{4}c^2$

Brandpunten:  $(x_0 \pm c, y_0)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; excentriciteit  $e = \frac{c}{a} (> 1)$

Richtlijnen:  $x = x_0 \pm \frac{a^2}{c}$

Parameter:  $p = \frac{b^2}{a}$

Raaklijn in  $(x_1, y_1)$ :

$$\frac{(x_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(y_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1$$

Normaal in  $(x_1, y_1)$ :

$$\frac{(y - y_1)(x_1 - x_0)}{a^2} = -\frac{(y_1 - y_0)(x - x_1)}{b^2}$$

Subnormaal:  $\frac{b^2}{a^2}(x_1 - x_0)$

Toegevoegde richting (bij vergelijking op de symmetrie-assen):

$$m \cdot m' = \frac{b^2}{a^2} \quad (m' \text{ is toegevoegde richtingscoëff.})$$

### Parabool

Topvergelijking, top in oorsprong, symmetrie-as langs  $X$ -as:

$$y^2 = 2px$$

Vergelijking bij top in  $(x_0, y_0)$ :

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Brandpunt:  $(x_0 + \frac{1}{2}p, y_0)$

Richtlijn:  $x = x_0 - \frac{1}{2}p$

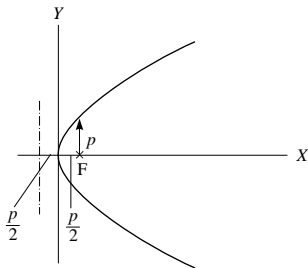
Raaklijn in  $(x_1, y_1)$ :

$$(y_1 - y_0)(y - y_0) = p(x + x_1 - 2x_0)$$

Normaal in  $(x_1, y_1)$ :

$$p(y - y_1) + (y_1 - y_0)(x - x_1) = 0$$

Subnormaal:  $p$



## 6 Differentiaal- en integraalrekening

### 6.1 Differentiaalrekening

De *differentiaalrekening* bestudeert de verandering van de afhankelijk variabele  $y$  in verhouding tot de verandering van de onafhankelijke variabele  $x$ , waarbij deze laatste veranderingen naar nul naderen.

Met  $\Delta x$  (*differentie*) wordt een kleine meetbare verandering van de variabele  $x$  aangegeven, zo is bij  $y = f(x)$  de verandering van  $y$ :  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Toepassing differentiaalrekening: o.a. bij bepaling extremen (zie ook hierna).

**Differentiequotiënt:** 
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Meetkundig is dit de gemiddelde toename van  $A$  naar  $B$  en gelijk aan de *richtingscoëfficiënt* (r.c.)  $\tan \beta$  van de *koorde*  $AB$  (zie [figuur 6.1](#)).

**Differentiaalquotiënt:** 
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dit wordt ook genoteerd als:  $f'(x)$  of  $y'$  of  $Df(x)$  of  $\frac{d}{dx}f(x)$ .

Meetkundig is dit de *helling van de grafiek* (= helling van de *raaklijn* ter plaatse) en gelijk aan de richtingscoëfficiënt ( $\tan \alpha$ ) van de raaklijn in  $A$ .

#### Afgeleide functies

(*Eerste*) *afgeleide functie* van  $f(x)$ : wordt genoteerd door  $f'(x)$  en bepaalt voor elke  $x$  uit het domein van  $f$  het differentiaalquotiënt.

$f'(x_1) > 0$ : de grafiek stijgt bij  $x_1$ .

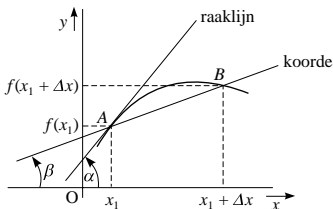
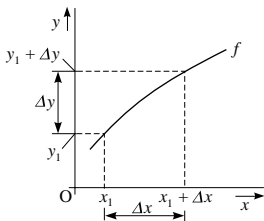
$f'(x_1) = 0$ : de grafiek heeft bij  $x_1$  een horizontale raaklijn.

$f'(x_1) < 0$ : de grafiek daalt bij  $x_1$ .

Tweede afgeleide functie van  $f(x)$ : wordt genoteerd door  $f''(x)$  of  $y''$  of  $\frac{d^2y}{dx^2}$  en is de afgeleide functie van  $f'(x)$ .

Dit voortzettend krijgt men de hogere afgeleiden  $f^{(n)}(x)$ .

*Opmerking:* de afgeleiden behoeven niet te bestaan. Om de eerste afgeleide te kunnen bepalen moet de functie in ieder geval continu zijn, de continuïteit alleen is echter niet voldoende.



*Figuur 6.1 Differentiequotiënt en differentiaalquotiënt (toelichting: zie tekst)*

*Tabel 6.1 Basisregels voor bepalen differentiaalquotiënt*

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$C$ (constant)	0	$x^p$	$p \cdot x^{p-1}$ (mits $p \neq 0$ )
$e^x$	$e^x$	$\ln x $	$1/x$
$a^x$	$a^x \ln a$ (mits $a > 0$ )	$\log_a x $	$1/(x \ln a)$ (mits $a > 0$ ) ( $= (\log_a e)/x$ )
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$	$\text{arccot } x$	$-1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\text{arsinh } x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\text{arcosh } x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$	$\text{artanh } x$	$1/(1-x^2)$

## Rekenregels

Als  $F(x) = cf(x)$ , dan is  $F'(x) = cf'(x)$  (mits  $f'(x)$  bestaat).

### Som/verschil

$F(x) = f(x) \pm g(x)$ , dan is:

$$F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

### Product

$F(x) = f(x)g(x)$ , dan is:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

### Quotiënt

$F(x) = f(x)/g(x)$ , dan is:

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad (\text{mits } g(x) \neq 0)$$

## Kettingregel

De meeste functies zijn samengesteld uit een aantal eenvoudige functies. Als  $F(x) = f\{g(x)\}$  en van  $f(y)$  en  $g(x)$  bestaan de afgeleiden, dan is  $F'(x) = f'\{g(x)\}g'(x)$ , of anders genoteerd:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

### Voorbeelden:

(1)  $F(x) = \sin^2 x$ , dan  $F'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

(2)  $F(x) = e^{x^2}$ , dan  $F'(x) = 2x e^{x^2}$

## Inverse regel

Stel  $y = f(x)$  en  $x = g(y)$  de inverse functie (als deze bestaat), dan is  $g'(y) = 1/f'(x)$ ; waarin:  $x = g(y)$  (mits  $f'(x) \neq 0$ ).

Voorbeeld:  $y = f(x) = e^x$ , dan  $x = g(y) = \ln y$ , dus:

$$g'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$



## Partiële afgeleide

Als  $f$  een functie van meer variabelen is, dan is de *partiële afgeleide* van  $f$  naar  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

en de *partiële afgeleide* van  $f$  naar  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

Voorbeeld:  $f(x, y) = x^2 y$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$  en  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ .

## Totale differentiaal

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy (+ \dots)$$

## Extremen bij functies van één onafhankelijke variabele

Met behulp van de differentiaalrekening bepaalt men alleen de *ronde* extremen (in inwendige punten van het domein van de functie  $y = f(x)$ ). Noodzakelijke voorwaarde is  $y' = 0$ .

- *maximum* =  $f(x_0)$  als  $f'(x_0) = 0$  en  $f''(x_0) < 0$
- *minimum* =  $f(x_0)$  als  $f'(x_0) = 0$  en  $f''(x_0) > 0$
- *buigpunt* bij  $x_0$  als  $f''(x_0) = 0$  en  $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

## Extremen bij functies van meer onafhankelijke variabelen

Stel  $z = f(x, y)$  met afgeleiden:  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  en  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Noodzakelijk voor inwendig extreem:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$  en  $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Stelt men  $\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \neq 0$ , dan heeft men in het betrokken punt  $(x_0, y_0)$ :

- *maximum* =  $f(x_0, y_0)$  als  $\Delta(x_0, y_0) > 0$  en  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$
- *minimum* =  $f(x_0, y_0)$  als  $\Delta(x_0, y_0) > 0$  en  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$
- *zadelpunt* bij  $(x_0, y_0)$  als  $\Delta(x_0, y_0) < 0$

Is  $\Delta(x_0, y_0) = 0$  dan moet men meestal ook de hogere afgeleiden in het probleem betrekken.

## 6.2 Gewone differentiaalvergelijkingen

### Begrippen

*Gewone differentiaalvergelijking (DV)*: een vergelijking waarin behalve de onafhankelijke variabele  $x$  en de daarvan afhankelijke variabele  $y$ , ook nog afgeleiden van  $y$  naar  $x$  voorkomen.

*Algemene vorm*:  $F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$  (1)

*Orde*: de DV is van de  $n^e$  orde wanneer de hoogst afgeleide die er in voorkomt, de  $n^e$  afgeleide is.

*Graad*: de graad van de DV wordt aangegeven door de hoogste macht waartoe de afhankelijke variabele of enige afgeleide daarvan, voorkomt.

*Lineaire differentiaalvergelijking*: een DV van de eerste graad.

*Oplossing of integraal van een DV*: een functie  $y(x)$  die bij substitutie in (1) een identiteit in  $x$  doet ontstaan.

*Algemene oplossing (AO)* van de DV: een functie  $y = f(x, C_1, \dots, C_n)$  waarin het aantal integratie-constanten overeenkomt met de orde van de DV.

*Particuliere oplossing (PO)* van de DV: verkrijgt men door dan de integratie-constanten waarden toe te kennen. Vaak worden deze toegekend op basis van gegeven *beginvoorwaarden*.

*Singuliere oplossing (SO)* van de DV: dit is een oplossing die niet bevat is in de algemene oplossing, maar bijv. als *omhullende* van de AO wordt verkregen.

Hieronder worden een aantal *oplossingsmethoden* voor DV's nader toegelicht.

### Scheiding van variabelen

Als  $y'$  expliciet is uit te drukken in  $x$  en  $y$ :  $y' = F(x, y)$ , kan geschreven worden:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2)$$

In het bijzondere geval dat

$$P(x, y) = R_1(x) \cdot S_2(y) \text{ en } Q(x, y) = R_2(x) \cdot S_1(y)$$

is (2) te herschrijven als:

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)} dx + \frac{S_1(y)}{S_2(y)} dy = 0$$

waarin de variabelen gescheiden zijn.

Deze vergelijking is nu door integratie op te lossen.

### Homogene vergelijking

Wanneer  $P$  en  $Q$  in (2) homogene functies van  $x$  en  $y$  zijn van dezelfde graad  $n$ , heeft de DV de vorm  $\frac{dy}{dx} + f(y/x) = 0$ . Door substitutie van  $y = x \cdot u$  kunnen de variabelen worden gescheiden en de DV geïntegreerd:

$$x = C \cdot \exp \left\{ - \int \frac{du}{f(u) + u} \right\}$$

### Exakte differentiaalvergelijking

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  is exact wanneer het linkerlid een exacte differentiaal is (een totale differentiaal van de functie van

$x$  en  $y$  voorstelt):  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} (= F)$

$$\text{Oplossing: } \int P \cdot dx + \int \left\{ Q - \int F \cdot dx \right\} dy = C$$

## Differentiaalvergelijking van Bernoulli

$$y' + P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^+ | n > 1)$$

Met de substitutie  $y^{1-n} = z$ , dus  $(1-n) \cdot y^{-n} \cdot y' = z'$  ontstaat de lineaire vergelijking:

$$\left( \frac{1}{1-n} \right) \cdot z' + P(x) \cdot z + Q(x) = 0$$

Is de vergelijking lineair ( $n = 1$ ), zie hierna.

## Lineaire differentiaalvergelijking (eerste orde)

$$y' + P(x) \cdot y + Q(x) = 0$$

Substitueer  $y = u(x) \cdot v(x)$ , met  $v(x)$  een *willekeurige* functie van  $x$ . Dit geeft  $u \{v' + v \cdot P(x)\} + v \cdot u' + Q(x) = 0$ .

Kies  $v$  zodanig dat de coëfficiënt van  $u$  nul wordt:

$$v' + v \cdot P(x) = 0.$$

De oplossing hiervan is  $v_0 = C_1 \cdot \exp\{-\int P(x) dx\}$

$$\text{Dan resteert } u' = -\frac{Q(x)}{v_0} = -\frac{Q(x)}{C_1} \exp\{-\int P(x) dx\}$$

$$\text{met oplossing } u = -\frac{1}{C_1} \int Q(x) \exp\{-\int P(x) dx\} dx + C_2$$

en ten slotte:  $y = u \cdot v_0$

## Lineaire differentiaalvergelijkingen (hogere orde)

Algemene vorm:

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_0(x) \cdot y = r(x)$$

of in verkorte notatie:  $L_n(y) = r(x)$

*Gereduceerde vergelijking*:  $L_n(y) = 0$ . Deze is *homogeen* in  $y, y', \dots, y^{(n)}$  en heeft in het algemeen een stelsel van  $n$  onafhankelijke oplossingen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , een stelsel *hoofdoplossingen* of een *fundamenteel stelsel* of een *basis* genaamd. De oplossingen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  heten elk een *particuliere* of een *bijzondere oplossing* (PO).

Iedere oplossing van de gedaante  $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n$  heet de *algemene oplossing* (AO).  $C_1, C_2, \dots, C_n$  zijn de integratieconstanten, die in concrete gevallen met behulp van de begin- of randvoorwaarden kunnen worden bepaald.

## Homogene vergelijking met constante coëfficiënten

$$a_n \cdot y^{(n)} + \dots a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

*Methode van Euler:* substitueer  $y = e^{\lambda \cdot x}$  ( $\lambda$  is constant), dan  $y^{(k)} = \lambda^k \cdot e^{\lambda \cdot x}$ , dus moet  $\lambda$  na substitutie voldoen aan:

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Deze zg. *karakteristieke vergelijking* heeft  $n$  wortels  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ; deze kunnen enkel- of meervoudig en reëel of complex zijn. Zijn alle wortels verschillend (dus reëel) dan is de algemene oplossing van de harmonische vergelijking:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x}$$

Bij een complex wortelpaar  $(\alpha_i, \alpha_i^*)$  behoort een deeloplossing:

$$C_i \cdot e^{\alpha_i \cdot x} + C_i^* \cdot e^{\alpha_i^* \cdot x}$$

Bij een  $k$ -voudige wortel  $\beta$  behoort de deeloplossing:

$$\{C_0 + C_1 \cdot x + \dots C_{k-1} \cdot x^{k-1}\} e^{\beta \cdot x}$$

## Niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

Algemene vorm:  $L_n(y) = r(x)$  ( $r(x) \neq 0$ )

Als  $y_0(x)$  één enkele *particuliere oplossing* van de volledige DV is [ $L_n(y_0) = r(x)$ ] en  $u(x)$  de *algemene oplossing* is van de gereduceerde vergelijking  $L_n(y) = 0$  (dus  $L_n(u) = 0$ ), dan is de algemene oplossing van de volledige DV:

$$y(x) = y_0(x) + u(x)$$

In een aantal gevallen kan de PO door *proberen* worden gevonden. Een algemene methode is die van de *variatie der constanten* (Lagrange) maar deze is meestal zeer bewerkelijk.

## 6.3 Partiele differentiaalvergelijkingen

Een *partiele differentiaalvergelijking* (PDV) heeft de gedaante:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

Men classificeert deze PDV's naar *orde*. De *orde* van de PDV is de orde van de hoogste partiële afgeleide die voorkomt.

Een *oplossing* van een PDV is een functie  $z = f(x, y)$  die na substitutie de PDV in een identiteit doet overgaan.

Voorbeeld: 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow z = f(x) + g(y)$$

Waarin  $f$  en  $g$  willekeurige differentieerbare functies zijn.

Bij het oplossen of integreren van PDV's krijgt men in plaats van willekeurige integratie-constanten willekeurige (differentieerbare) functies.

## 6.4 Integraalrekening

*Integreren* kan worden opgevat als de inverse bewerking van *differentiëren*.

### Primitieve functie, onbepaalde integraal

Een *primitieve functie*  $F(x)$  van  $f(x)$ , heeft de eigenschap:  $F'(x) = f(x)$ . Bij  $F(x)$  is een willekeurige constante op te tellen; steeds geldt  $F'(x) = f(x)$ .

De verzameling van alle zo te verkrijgen primitieven heet de *onbepaalde integraal*. Notatie:  $F(x) = \int f(x) dx$ .

Voorbeeld:  $f(x) = x$ .

$$F(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \text{ want } \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = x.$$

## Basisregels voor onbepaald integreren

$$\int a \, dx = ax; \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \quad (x \neq 0)$$

$$\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} \quad (p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int e^x \, dx = e^x; \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x; \quad \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x; \quad \int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \ln|\tan \frac{1}{2}x|; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right|; \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}; \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

## Reductieformules

Voor  $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx =$$

$$= \frac{\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

## Combinatieregels

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\int c f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C \quad (\text{mits } f(x) \neq 0)$$

## Diverse integratiemethoden

*Substitutiemethode.* Door  $f(x) = t$  te stellen krijgt men:

$$\int F\{f(x)\} f'(x) \, dx = \int F(t) \, dt$$

$$\text{Voor bepaalde integralen: } \int_a^b F\{f(x)\} f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} F(t) \, dt$$



*Partieel integreren.* Zijn  $F(x)$  en  $G(x)$  primitieven van  $f(x)$  resp.  $g(x)$  dan is:

$$\int f(x)G(x) dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x) dx$$

*Voorbeelden:*

(1)  $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

(2)  $\int (x^2 + 3x)^2(2x + 3) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C =$   
 $= \frac{1}{3}(x^2 + 3x)^3 + C$

(3) Zie bij **reductieformules** hiervoor.

*Partieel-breuksplitsing.* Elke rationale functie van de vorm  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (graad  $f <$  graad  $g$ , anders is dit door uitdelen te bereiken) kan in partieel-breuken worden gesplitst.

Daartoe is  $g(x)$  te ontbinden in factoren van de vorm  $(ax + b)^k$  en/of  $(px^2 + qx + r)^l$ .

$\frac{f(x)}{g(x)}$  is nu een som van partieel-breuken met de gedaante:

$$\sum_{j=1}^k \frac{A_j}{(ax + b)^j} \text{ en } \sum_{m=1}^l \frac{B_m x + C_m}{(px^2 + qx + r)^m}$$

Men kan nu elk van deze breuken afzonderlijk integreren.

### **Bepaalde integraal**

Het berekenen van de *bepaalde integraal* geschiedt volgens:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Waarin  $F(x)$  de *primitieve functie* is;  $F'(x) = f(x)$ .  
(*Hoofdstelling.*)

Eigenschappen:

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Is  $f(x)$  continu, dan bestaat  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$  en geldt:

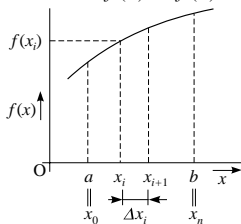
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

D.w.z. differentiëren van een bepaalde integraal met variabele bovengrens levert de integrand in die bovengrens op.

$\int_a^b f(x) dx$  is op te vatten als de oppervlakte onder  $f(x)$  als  $f(x) > 0$ .

Meetskundig (zie figuur 6.2):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$$



Figuur 6.2 Integreren

Middelwaardstelling:  $\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi)$  met  $a \leq \xi \leq b$

### Oneigenlijke integralen

Bij oneigenlijke integralen wordt òf de integrand òf het integratie-interval *oneindig groot* (eventueel beide):

- *Oneigenlijke integraal van de eerste soort* (zie [figuur 6.3a](#)): één of beide integratie-grenzen is oneindig en de integrand is verder continu.

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

*Voorbeeld:*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x} \, dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x} \, dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^b = 1 \end{aligned}$$

- *Oneigenlijke integraal van de tweede soort* (zie [figuur 6.3b](#)): het integratie-interval is eindig, maar de integrand heeft een discontinuïteit in een punt van het interval:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) \, dx,$$

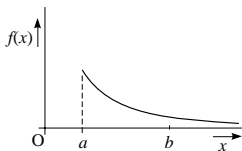
als de discontinuïteit in  $x = c$  optreedt. Vaak valt  $c$  in één der eindpunten.

*Voorbeeld:*

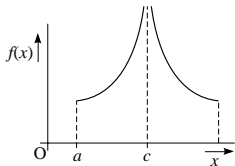
$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [2\sqrt{x}]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [4 - 2\sqrt{\varepsilon}] = 4 \end{aligned}$$

- Treden er een aantal ‘moeilijkheden’ bij dezelfde integraal op dan splitst men het integratie-interval in een aantal delen zodat per deel één oneigenlijkheid optreedt.

Bestaat de limiet in bovenstaande gevallen dan heet de oneigenlijke integraal *convergent*, anders *divergent*.



Figuur 6.3a Oneigenlijke integraal van de **eerste** soort

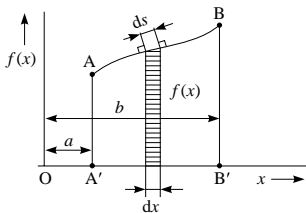


Figuur 6.3b Oneigenlijke integraal van de **tweede** soort

## 6.5 Toepassingen integraalrekening

### Lengte van een vlakke kromme

$$\text{Lengte AB: } s = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$



### Oppervlakte van een vlakke figuur

$$\text{Oppervlakte ABB'A': } A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

## Inhoud omwentelingslichaam<sup>1)</sup>

Bij wenteling van AA'B'B om de X-as:  $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

## Manteloppervlakte omwentelingslichaam<sup>1)</sup>

Bij wenteling van AA'B'B om de X-as, is de door AB beschreven oppervlakte:

$$A_1 = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \cdot dx$$

## Cöördinaten oppervlakte-middelpunt (zwaartepunt)

Het oppervlakte-middelpunt van AA'B'B heeft de coördinaten:

$$x_M = \frac{1}{A} \int_a^b x \{f(x)\} dx$$

$$y_M = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} \{f(x)\}^2 dx$$

waarin:  $A = \text{opp. AA'B'B}$

<sup>1)</sup> Regels van Guldin, zie pag. A2/38.

# 7 Transformaties (Fourier, Laplace)

## 7.1 Fourier-analyse

Een periodieke functie met periode  $T$  kan worden geschreven in een *Fourier-reeks*:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\}$$

waarin:  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  de grond-cirkelfrequentie

Verder is:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos(n\omega_0 \tau) d\tau$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin(n\omega_0 \tau) d\tau \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$f(t)$  in **complexe vorm**:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \exp(-jn\omega_0 \tau) d\tau$$

met  $c_n = |c_n| \exp(j\phi_n)$  en  $c_{-n} = c_n^* = |c_n| \exp(-j\phi_n)$

*Amplitude-spectrum*:  $|c_n|$  uitgezet naar cirkelfrequentie  $\omega$

*Fase-spectrum* :  $\phi_n$  uitgezet naar  $\omega$

Tabel 7.1 Symmetrievormen

symmetrievorm	kenmerk $f(t) =$	leidt tot $f(t) =$
verschuivingsymmetrie	$-f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3 \omega t + \dots +$ $+ b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3 \omega t + \dots$
radiale symmetrie	$-f(-t)$	$b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2 \omega t +$ $+ b_3 \sin 3 \omega t + \dots$
radiale- en verschuivingsymmetrie	$-f(-t) =$ $-f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3 \omega t +$ $+ b_5 \sin 5 \omega t + \dots$
spiegelbeeldsymmetrie	$f(-t)$	$a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2 \omega t +$ $+ a_3 \cos 3 \omega t + \dots$
spiegelbeeld- en verschuivingsymmetrie	$f(-t) =$ $-f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3 \omega t +$ $+ a_5 \cos 5 \omega t + \dots$

*Opmerking:* bij de Fourier-componenten kan weer per component de complexe rekenwijze worden toegepast.

## 7.2 Fourier-transformatie

Voor niet-periodieke functies die absoluut integreerbaar zijn past men de *transformatie van Fourier* toe.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau$$

met de eis:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau < \infty$

$F(\omega)$  is de Fourier-transformatie:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \exp\{j\phi(\omega)\}$$

waarin:

$F(\omega)$  = complexe spectrum van  $f(t)$

$|F(\omega)|$  = amplitude-spectrum van  $f(t)$

$\phi(\omega)$  = fase-spectrum van  $f(t)$

### Eigenschappen

Lineariteit:  $af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$

Verschuiving in het  $t$ -gebied:  $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)\exp(-j\omega t_0)$

Verschuiving in het  $\omega$ -gebied:  $\exp(j\omega_0 t)f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

Wederkerigheid:  $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$   
 $F(-t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

Afgeleiden van functies van  $t$ :  $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

Afgeleiden van functies van  $\omega$ :  $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

Integratie van functies van  $t$ :  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \left(\frac{1}{j\omega}\right) F(\omega)$

## 7.3 Laplace-transformaties

Laplace-transformaties kunnen worden toegepast voor functies die niet absoluut integreerbaar hoeven te zijn.

### Tweezijdige Laplace-transformatie

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) \exp(st) ds$$

$$s = j\omega + \sigma$$

**Enkelzijdige Laplace-transformatie**  $f(t) = 0$  voor  $t < 0$ :

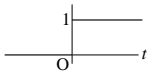
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) \exp(st) ds$$

Notaties:  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ;  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

**Eigenschappen**

$$f(t)u(t) \leftrightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$$



$$u(t) := 1 \text{ voor } t \geq 0$$

$$:= 0 \text{ voor } t < 0$$

Lineariteit:

$$\{af_1(t) + bf_2(t)\}u(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s)$$

Gelijkvormigheid:

$$f(at)u(t) \leftrightarrow (1/|a|)F(s/a)$$

Verschuiving in  $t$ -gebied:

$$f(t - t_0)u(t - t_0) \leftrightarrow F(s) \exp(-st_0)$$

$$u(t - t_0) = 1 \text{ voor } t \geq t_0$$

$$= 0 \text{ voor } t < t_0$$

Verschuiving in  $s$ -gebied (dempingsstelling):

$$f(t)\exp(-at)u(t) \leftrightarrow F(s+a)$$

Afgeleiden van functies van  $t$ :

$$\{df(t)/dt\}u(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$d\{f(t)u(t)\}/dt \leftrightarrow sF(s)$$

$$\{d^2f(t)/dt^2\}u(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf'(0) - f''(0)$$

Integralen van functies van  $t$ :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} F(s)$$

Theorema's van Abel (begin- en eindwaarde-theorema's):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0); \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty)$$

Periodieke functies:

$$f(t+T) = f(t) \leftrightarrow \{1 - \exp(-sT)\}^{-1} \int_0^T f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$$

Partiële afgeleide van  $f(x; t)u(t)$  naar  $x$ :

$$\partial_x f(x; t)u(t) \leftrightarrow \partial_x F(x; s)$$

**Standaardtransformaties**

Zie [tabel 7.2](#).

## 7.4 *z*-transformaties

De *z*-transformatie wordt gebruikt bij het beschrijven van tijdsdirecte verschijnselen en intermitterende systemen, zoals *bemonsterde regelsystemen (sampled data control systems)* en *digitale signaalbewerking*. Kenmerkend daarvan is dat alleen de waarden op de equidistante bemonsteringstijdstippen (niet de tussenliggende waarden) worden beschouwd:  $f(nT)$ , meestal genoteerd als  $f_n$  of  $f[n]$ .

De *z*-transformatie, die kan worden beschouwd als de discrete vorm van de Laplace-transformatie, is gedefinieerd als:

$$F(z) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

De factor  $z^{-1}$  is niet meer dan een andere schrijfwijze voor  $e^{-sT}$  en betekent een vertraging van één bemonsterinterval  $T$ .

*Beginwaarde-theorema:*  $\lim_{n \rightarrow 0} \{f(nT)\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \{F(z)\}$

*Eindwaarde-theorema:*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(nT)\} = \lim_{z \rightarrow 1} \{(1 - z^{-1})F(z)\}$

*Tijdverschuiving:*  $\mathcal{L}\{f(nT - kT)\} = z^{-k}F(z)$

*Differentiatie:*  $\mathcal{L}\{n \cdot f(nT)\} = -z \frac{dF(z)}{dz}$

*Schaling:*  $\mathcal{L}\{a^n f(nT)\} = F(z/a)$   
(exponentieel wegen, resulteert in schaling in het *z*-domein)

Opmerking. *Schaling* komt neer op *frequentieverschuiving*:

$$\frac{z}{a} = \frac{e^{sT}}{a} = \frac{e^{sT}}{e^{\ln a}} = e^{(sT - \ln a)} = \exp\left[\left(s - \frac{1}{T} \ln a\right)T\right]$$

Tabel 7.2 Laplace- en z-getransformeerden

functie in het tijddomein $f(t)$	Laplace-getrans- formeerde $F(s)$	z-getransformeerde $F(z)$
$\delta(t)$ <sup>1)</sup>	1	–
$\delta_n(nT)$ <sup>2)</sup>	0	1
$u(t)$ <sup>3)</sup>	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$at \cdot u(t)$	$\frac{a}{s^2}$	$\frac{aTz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$t^2 \cdot u(t)$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})^3}$
$t^m \cdot u(t)$	$\frac{m!}{s^{m+1}} (m \in \mathbb{N})$	
$e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$
$t \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$\frac{T e^{-\alpha T} z^{-1}}{(1 - e^{-\alpha T} z^{-1})^2}$
$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega T)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega T) + z^{-2}}$
$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega T)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega T) + z^{-2}}$
$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{1 - z^{-1} e^{-\alpha T} \cos(\omega T)}{1 - 2z^{-1} e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T} z^{-2}}$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^{-1} e^{-\alpha T} \sin(\omega T)}{1 - 2z^{-1} e^{-\alpha T} \cos(\omega T) + e^{-2\alpha T} z^{-2}}$
$\cosh(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$\frac{1 - z^{-1} \cosh(\beta T)}{1 - 2z^{-1} \cosh(\beta T) + z^{-2}}$
$\sinh(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$\frac{z^{-1} \sinh(\beta T)}{1 - 2z^{-1} \cosh(\beta T) + z^{-2}}$

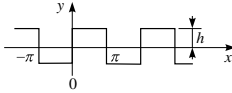
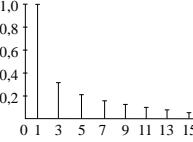
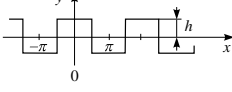
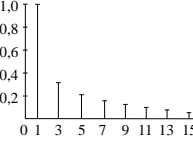
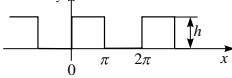
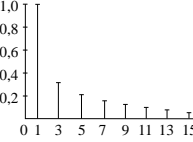
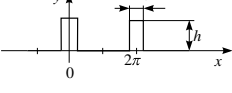
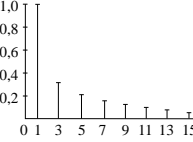
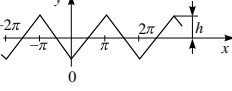
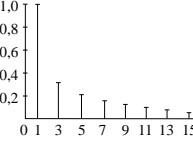
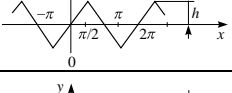
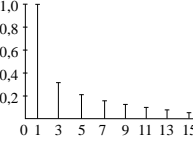
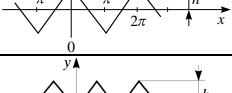
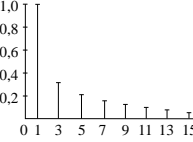
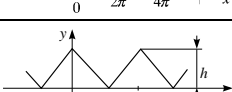
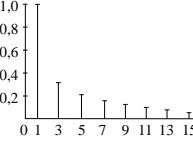
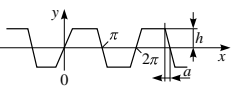
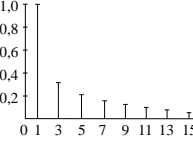
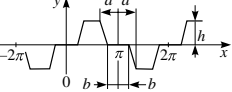
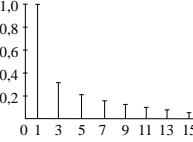

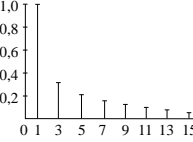
<sup>1)</sup> Eenheidsimpuls:  $\delta(t) = 0$  voor  $t \neq 0$  en  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .

<sup>2)</sup> Discrete eenheidspuls:  $\delta_n(nT) = 1$  voor  $n = 0$ ;  $\delta_n(nT) = 0$  voor  $n \neq 0$ .

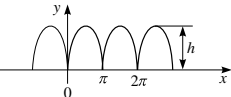
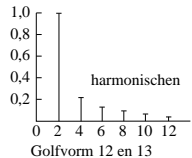
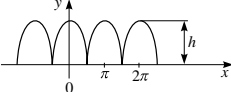
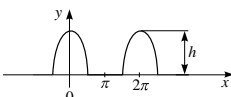
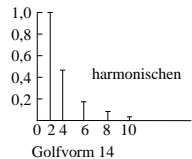
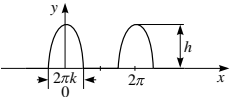
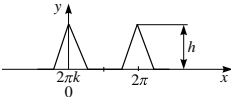
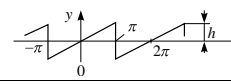
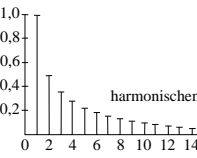
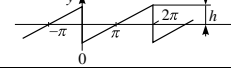
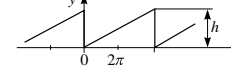
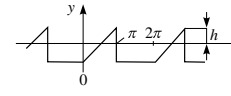
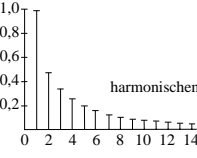
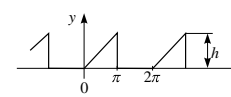
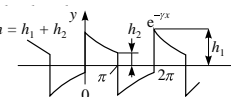
<sup>3)</sup> Eenheidsstap:  $u(t) = 1$  voor  $t \geq 0$ ;  $u(t) = 0$  voor  $t < 0$ .

# 7.5 Analyse van enkele golfvormen

Tabel 7.3 Golfvorm-vergelijkingen

golfvorm	vergelijking	spectrum <sup>1)</sup>
	$y = \frac{4h}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 1, 2 en 3</p>
	$y = \frac{4h}{\pi} \left( \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 1, 2 en 3</p>
	$y = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 1, 2 en 3</p>
	$y = h \left\{ k + \frac{2}{\pi} \left( \sin k \pi \cos x + \frac{1}{2} \sin 2 k \pi \cdot \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3 k \pi \cos 3x + \dots \right) \right\}$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 1, 2 en 3</p>
	$y = -\frac{8h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 5, 6 en 7</p>
	$y = \frac{8h}{\pi^2} \left( \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 5, 6 en 7</p>
	$y = \frac{8h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 5, 6 en 7</p>
	$y = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 8 en 9</p>
	$y = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 8 en 9</p>
	$y = \frac{4h}{a \cdot \pi} \left( \sin a \cdot \sin x + \frac{\sin 3a}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5a}{5^2} \cdot \sin 5x + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 10 met <math>a = \frac{\pi}{4}</math></p>
	$y = \frac{4h}{\pi(a-b)} \left( (\sin a - \sin b) \sin x + \frac{\sin 3a - \sin 3b}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5a - \sin 5b}{5^2} \cdot \sin 5x + \dots \right)$	 <p style="text-align: center;">harmonischen Golfvorm 10 met <math>a = \frac{\pi}{4}</math></p>

Tabel 7.3 (vervolg)

golfvorm	vergelijking	spectrum <sup>1)</sup>
	$y = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	
	$y = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left( -\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	
	$y = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2} \cos x + \frac{2h}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \dots \right) + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \dots \dots$	
	$y = \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{1 - 4k^2 n^2} \cos nx$	
	$y = \frac{hk}{2} + \frac{2h}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cos nx$	
	$y = \frac{2h}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$	
	$y = -\frac{2h}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	
	$y = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	
	$y = -\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{2h}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + \dots \right)$	
	$y = \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{h}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + \dots \right)$	
	$y = \frac{2hy}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin(2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$	

<sup>1)</sup> Exclusief een eventuele 'gelijkstroom'-component.

# 8 Lineaire algebra

## 8.1 Matrices

### Matrix

Een  $m \times n$ -matrix  $A$  is een rechthoekig getallenschema met elementen  $a_{ij}$ ,  $i$  is de rij- en  $j$  de kolom-index:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$A$  is een  $2 \times 3$ -matrix.

$B$  een *diagonaal*matrix.

$I_3$  is  $3 \times 3$ -*eenheids*matrix.

$D$  is *orthogonaal*:  $\sum_{k=1}^3 d_{ik}d_{jk} = 0$  als  $i \neq j$  en  $= 1$  als  $i = j$ .

Matrix  $A^T$  met elementen  $(a^T)_{ij} = a_{ji}$  is de *getransponeerde* van  $A$ .  
Als  $A^T = A$  dan is  $A$  *symmetrisch*.

### Standaard-rij(kolom)vorm

Een matrix is in *standaard-rij(kolom)vorm* als elke volgende rij (kolom) met meer nullen begint als de voorgaande, zo die niet al een nulrij is.

### Elementaire operaties

Een matrix kan in standaard-rijvorm worden gebracht door *elementaire operaties*:

- twee rijen verwisselen;
- een rij met een scalar  $\lambda \neq 0$  vermenigvuldigen;
- bij een rij een  $\lambda$ -voud van een andere bijtellen.

### Rang

De *rang* van  $A$  is het aantal niet-nul rijen, dat overblijft als  $A$  in standaard-rijvorm is gebracht.

## 8.2 Matrixrekening

### Som en product

De som van twee  $m \times n$ -matrices:  $C = A + B$  met  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$   
Het matrixproduct van een  $m \times n$ -matrix  $A$  en een  $n \times p$ -matrix

$B$  is een  $m \times p$ -matrix  $C = AB$  met  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

Het product van een matrix  $A$  met een scalair  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  
 $C = \lambda A$  met  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

### Eigenschappen

$$A + B = B + A$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

In het algemeen geldt:  $AB \neq BA$ ; uit  $AB = 0$  (nulmatrix) volgt niet  $A = 0$  óf  $B = 0$ ; uit  $AB = AC$  volgt niet  $B = C$ .

### Inverse

De inverse van een vierkante matrix  $A$  is  $A^{-1}$  als

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Als  $A$  en  $B$  inverteerbaar zijn, dan ook  $AB$  en er geldt  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Voor een orthogonale matrix  $A$  is  $A^{-1} = A^T$ .

In par. 8.3 komt een methode aan de orde om  $A^{-1}$  te berekenen.

## 8.3 Determinanten

In deze paragraaf gaat het steeds om determinanten van een  $n \times n$ -matrix  $A$ .

### Definitie

De determinant van  $A$ , notatie  $|A|$ , is een getal:

– als  $n = 1$  dan  $|A| = a_{11}$

– als  $n \geq 1$  dan  $|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$



De *onderdeterminant*  $M_{ik}$  is de determinant van de matrix die overblijft als in  $A$  de  $i^e$  rij en de  $k^e$  kolom worden weggelaten.

$$\text{Voor } n = 2: |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{Voor } n = 3: |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

## Eigenschappen

Opmerking: waar *rij* staat, kan ook *kolom* worden gelezen.

- $|A|$  verandert van teken als twee rijen worden verwisseld.
- $|A| = 0$  als rang  $A < n$  (dit is bijvoorbeeld het geval wanneer een rij het  $\lambda$ -voud is van een andere rij).
- $|A|$  verandert niet, als bij een rij het  $\lambda$ -voud van een andere rij wordt opgeteld.

$$- |A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \text{ en } |A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} M_{kj} \text{ (alle } i, j)$$

$$- |AB| = |A||B| \neq |B||A|; |\lambda A| = \lambda^n |A|; |A^T| = |A|$$

- Als  $A$  orthogonaal is, dan:  $|A| = \pm 1$ .  $A$  heet *direct* orthogonaal als  $|A| = +1$  en *gespiegeld* orthogonaal als  $|A| = -1$ .

- Een matrix  $A$  is alleen dan inverteerbaar als  $|A| \neq 0$ .

- De elementen van de inverse  $B = A^{-1}$  zijn dan:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{|A|}$$

## 8.4 Lineaire (deel)ruimten, lineaire transformaties

### Lineaire (deel)ruimte

In  $\mathbb{R}_n$ , d.i. de verzameling  $n$ -tallen  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ , wordt gedefinieerd:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n] \text{ en } \lambda \mathbf{x} = [\lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$$

$\mathbb{R}_n$  is dan een *lineaire ruimte*, met  $\mathbf{x}$  de *vectoren*, omdat:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$                               | (5) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$   |
| (2) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ | (6) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ |
| (3) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ ( $\mathbf{0} = [0, \dots, 0]$ )           | (7) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$            |
| (4) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ( $-\mathbf{x} = [-x_1, \dots, -x_n]$ ) | (8) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$                          |

$D \subset \mathbb{R}_n$  is een *lineaire deelruimte* van  $\mathbb{R}_n$ , als met  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{y}$  ook  $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$  in  $D$  ligt. De verzameling  $\mathbf{a} + D = \{\mathbf{a} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D\}$  heet dan een *lineaire variëteit*.

### Afhankelijkheid/onafhankelijkheid

Als  $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \dots$  dan is  $\mathbf{x}$  lineair *afhankelijk* van  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots\}$ . Het stelsel  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots\}$  is lineair *onafhankelijk* als geen enkele vector uit het stelsel van de overige afhankelijk is.

### Lineaire transformatie

Een *lineaire transformatie* is een functie  $T \in \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_m$  zó dat  $T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$ .

De lineaire transformaties hebben de vorm  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , waarbij in het rechterlid  $A$  een  $m \times n$ - en  $\mathbf{x}$  een  $n \times 1$ -matrix is.

*Voorbeelden:*

(1)  $T \in \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$  met  $T[x_1, x_2, x_3] = [x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 - 7x_3]$

$$\text{en } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

(2) Een *draaiing* in  $\mathbb{R}_2$  over een hoek  $\varphi$  is een lineaire transformatie.

$$T \in \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$$

$$\text{met } T[x_1, x_2] = [x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi]$$

$$\text{en } A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

### Kern lineaire transformatie

De *kern* van een lineaire transformatie is  $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ .  $K$  is een lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}_n$ .

De vergelijking  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  heeft als oplossingsverzameling de variëteit  $\mathbf{p} + K$ , waarin  $\mathbf{p}$  een particuliere oplossing is.

Het bepalen van de kern  $K$  en van de oplossingen van  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  komt neer op het oplossen van een stelsel homogene, resp. inhomogene vergelijkingen (zie par. 8.6).

In voorbeeld 1 (zie hierboven) is de kern, resp. de oplossingsverzameling van  $T(\mathbf{x}) = [5, 2]$  te vinden uit:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 \quad \quad - 7x_3 = 0 \end{cases} \text{ resp. } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 \quad \quad - 7x_3 = 2 \end{cases}$$

## 8.5 Eigenwaarden, eigenvectoren

Stel  $A$  is een  $n \times n$ -matrix. De vergelijking  $|A - \lambda I_n| = 0$  heet de *karakteristieke vergelijking* van  $A$ .

De  $n$  oplossingen voor  $\lambda$  zijn de *eigenwaarden* van  $A$ .

De bij een eigenwaarde  $\lambda$  behorende vectoren  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  met  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  heten *eigenvectoren* bij  $\lambda$ .

*Voorbeeld:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 12 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

De eigenwaarden:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . De bijbehorende eigenvectoren zijn veelvoud van  $\mathbf{x} = [-3, 1]$  resp.  $\mathbf{x} = [-4, 1]$ .

### Eigenschappen

- $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + \dots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|$
- Een orthogonale  $n \times n$ -matrix, met  $n$  oneven, heeft minstens één reële eigenwaarde.
- De reële eigenwaarden van een orthogonale matrix zijn  $\pm 1$ .
- Een symmetrische matrix heeft alléén reële eigenwaarden.
- Bij een symmetrische matrix  $S$  is een orthogonale matrix  $P$  met  $|P| = +1$  te vinden, die in de kolommen eigenvectoren bij  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  heeft, zodanig dat  $P^{-1}SP$  een diagonaal-matrix is met in de diagonaal  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

## 8.6 Lineaire vergelijkingen

(I) Een **homogeen** stelsel:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

(II) Een **inhomogeen** stelsel:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \text{(niet alle } b_i = 0)$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

De matrix  $A$  is de *coëfficiëntenmatrix* en de matrix  $A^a$  die uit  $A$  ontstaat door de kolom  $\mathbf{b}$  toe te voegen heet de *aangevulde matrix*.

De oplossingen  $\mathbf{x}$  van (I) vormen een lineaire deelruimte  $K \subset \mathbb{R}_n$ . De oplossingsverzameling van (II) is dan de variëteit  $\mathbf{y} + K$ , waarbij  $\mathbf{y}$  een particuliere oplossing van (II) is.

**Oplosbaarheids criterium.** (II) is alléén oplosbaar als  $\text{rang } A = \text{rang } A^a$ .

**Oplossingsmethode.** De oplossingsmethode van (I) en (II): de *eliminatie-methode van Gauss*.

Hierbij wordt de matrix  $A$  resp.  $A^a$  via elementaire rij-operaties in de standaard-rijvorm gebracht. Daarna wordt het zo ontstane vereenvoudigde stelsel 'terugwaarts' opgelost.

**Het aantal oplossingen** ( $r = \text{rang } A$ )

(I) heeft alléén de nuloplossing als  $r = n$ .

(I) heeft oneindig veel oplossingen als  $r < n$ . Daaronder is een onafhankelijk stelsel van  $n - r$  oplossingen, waar alle andere oplossingen lineaire combinaties van zijn.

(II) heeft precies één oplossing als  $\text{rang } A = \text{rang } A^a = n$ .

(II) heeft oneindig veel oplossingen als  $\text{rang } A = \text{rang } A^a < n$ .

In het **bijzondere geval**  $m = n$  geldt bovendien: er is precies één oplossing (in (I) de nul-oplossing) alléén als  $|A| \neq 0$ . Deze oplossing  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$  kan worden gevonden met de *regel van*

Cramer:  $x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$  waarin  $A_k$  de matrix is, die uit  $A$  ontstaat door de  $k^e$  kolom te vervangen door de  $\mathbf{b}$ -kolom.

## 8.7 Kwadratische vormen, kwadratische oppervlakken

### Kwadratische vorm in $\mathbf{R}_n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

Deze vorm is als matrixproduct  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x}$  te schrijven met  $\mathbf{x}^T$  een  $1 \times n$ -,  $\mathbf{x}$  een  $n \times 1$ -matrix en  $S$  de symmetrische matrix met  $s_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ .

Voorbeeld:  $6x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_1x_2 = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Laat  $P$  de direct orthogonale matrix zijn, met in de kolommen eigenvectoren van  $S$  bij de eigenwaarden  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (zie par. 8.5), dan gaat door een coördinaten-transformatie  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$ , dit is substitutie  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ , de vorm  $\mathbf{x}^T S \mathbf{x}$  over in de **hoofdassengedaante**:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

### Kwadratisch oppervlak in $\mathbf{R}_3$

De algemene vergelijking van een *kwadratisch oppervlak* is:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$$

Door een *rotatie* van het assenstelsel,  $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$  (zie hierboven), wordt de vergelijking

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b'_1 y_1 + b'_2 y_2 + b'_3 y_3 + c = 0$$

Door een *translatie* van het assenstelsel,  $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{p}$ , kunnen de lineaire termen  $y_i$  met  $\lambda_i \neq 0$ , verdwijnen.

Afhankelijk van de waarden van de coëfficiënten, worden verschillende oppervlakken verkregen; enkele *voorbeelden*:

$2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 5 = 0$	ellipsoïde
$2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5 = 0$	eenbladige hyperboloïde
$2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 5 = 0$	tweebladige hyperboloïde
$2x_2^2 + x_2^2 - 3x_3^2 = 0$	elliptische kegel
$2x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$	elliptische paraboloiden
$2x_2^2 - x_2^2 + x_3 = 0$	hyperbolische paraboloiden

## 9 Vectoralgebra en -analyse

### 9.1 Vectoren

Op vectoren in  $\mathbb{R}_2$  (platte vlak) en in  $\mathbb{R}_3$  (ruimte) worden twee bewerkingen toegepast:

- Optelling:  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
- Vermenigvuldiging met (scalair getal):  $\lambda \mathbf{a}$

Speciale betekenis hebben:

- eenheidsvector  $\mathbf{e}$  ( $|\mathbf{e}| = 1$ );
- nulvector  $\mathbf{0}$  ( $|\mathbf{0}| = 0$ ).

#### Eigenschappen

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{x}$  (slechts één vector toegevoegd)

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (commutatieve eigenschap)

$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$  (associatieve eigenschap)

$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$  (omkering van de optelling)

of  $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  ( $\mathbf{x}$  is het verschil van  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{a}$ )

$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$

$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$

$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

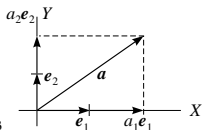
#### Lengte van een vector

In  $\mathbb{R}_2$  is  $\mathbf{a} = (a_1, a_2) = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

In  $\mathbb{R}_3$  is  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



In meer algemene zin ( $\mathbb{R}_n$ ) heet

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \text{ de norm van de vector.}$$

### Hoek tussen twee vectoren

$$\text{In } \mathbb{R}_2: \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|a| \cdot |b|} \quad \text{In } \mathbb{R}_3: \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|a| \cdot |b|}$$

### Scalair of inwendig product

$$\text{In } \mathbb{R}_2: a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{In } \mathbb{R}_3: a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\text{In } \mathbb{R}_2 \text{ en in } \mathbb{R}_3 \text{ geldt: } \cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

Als  $a \cdot b = 0$ : vectoren loodrecht op elkaar.

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \lambda(a \cdot b) = \lambda a \cdot b = a \cdot \lambda b$$

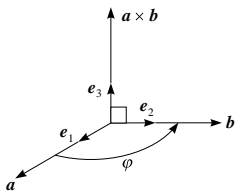
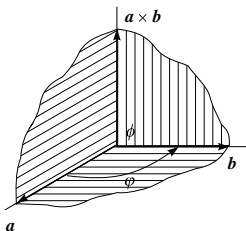
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad a \cdot a = |a|^2$$

### Vectorieel of uitwendig product

$$p = a \times b = a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Er geldt:

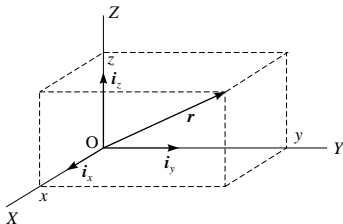
- $|p| = |a \times b|$  is oppervlakte parallellogram opgespannen door  $a$  en  $b$ ;
- $p$  staat loodrecht op vlak door  $a$  en  $b$ ;
- oriëntatie van  $a$  naar  $b$  naar  $p$  is dezelfde als van  $e_1$  naar  $e_2$  naar  $e_3$  (of  $i, j$  en  $k$ , zie par. 9.2) (*Kurkentrekkerregel*).



## 9.2 Vectoralgebra

De *vectoralgebra* betreft bewerkingen met en op vectoren in de drie-dimensionele ruimte. Deze zijn gedefinieerd reële of complexe kentallen, die worden vastgelegd t.o.v. een vaste orthonormale basis  $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$  (ook wel  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ).

### Rechtscyclisch Cartesiaans stelsel



Vectoren:  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i}_x + a_y \mathbf{i}_y + a_z \mathbf{i}_z$  en  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i}_x + b_y \mathbf{i}_y + b_z \mathbf{i}_z$   
 $\lambda$  en  $\mu$ : reële of complexe getallen

### Lineaire combinatie:

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} := (\lambda a_x + \mu b_x) \mathbf{i}_x + (\lambda a_y + \mu b_y) \mathbf{i}_y + (\lambda a_z + \mu b_z) \mathbf{i}_z$$

### Scalar of inwendig product

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

### Vectorieel of uitwendig product

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

### Eigenschappen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ &= -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{scalair} \\ \text{tripelproduct} \end{array}$$



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{vectoriële} \\ \text{tripelproduct} \end{array}$$

## 9.3 Vectoranalyse

### Differentiëren en integreren naar een parameter

Laat  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  een differentieerbare vectorfunctie van de parameter  $t$  zijn, dan is:

$$d_t \mathbf{v} := (d_t v_x)\mathbf{i}_x + (d_t v_y)\mathbf{i}_y + (d_t v_z)\mathbf{i}_z \quad (d_t = d/dt)$$

Laat  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  een integreerbare vectorfunctie van  $t$  zijn, dan is:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt := \left( \int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt \right) \mathbf{i}_x + \left( \int_{t_1}^{t_2} v_y(t) dt \right) \mathbf{i}_y + \left( \int_{t_1}^{t_2} v_z(t) dt \right) \mathbf{i}_z$$

Met  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  en  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$  gelden de volgende regels:

$$d_t(\varphi \mathbf{v}) = (d_t \varphi)\mathbf{v} + \varphi(d_t \mathbf{v})$$

$$d_t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (d_t \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (d_t \mathbf{w})$$

$$d_t(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (d_t \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times (d_t \mathbf{w})$$

### Differentiëren naar de plaatscoördinaten

Plaatsvector  $\mathbf{r}$  in het rechtscyclisch cartesiaans stelsel:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z \quad (\text{zie } \text{guur pa} . 2)$$

Met de scalairfunctie  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  is de *gradiënt* van  $\varphi$ :

$$\text{grad } \varphi := (\partial_x \varphi)\mathbf{i}_x + (\partial_y \varphi)\mathbf{i}_y + (\partial_z \varphi)\mathbf{i}_z \quad (\partial_x = \partial/\partial x)$$

Met de vectorfunctie  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$  is de *divergentie van  $\mathbf{v}$* :

$$\text{div } \mathbf{v} := \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$$

De rotatie van een vectorfunctie  $\mathbf{v}$ :

$$\text{rot } \mathbf{v} := \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Met de *nabla*-operator:  $\nabla := \partial_x \mathbf{i}_x + \partial_y \mathbf{i}_y + \partial_z \mathbf{i}_z$

kan men schrijven:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi; \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}; \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

### Regels voor differentiëren naar plaatscoördinaten

( $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  en  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  zijn differentieerbare *scalar*functies;  
 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  en  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r})$  zijn differentieerbare *vector*functies)

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi$$

$$\text{div}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{div } \mathbf{v} + \text{div } \mathbf{w}$$

$$\text{rot}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \psi \text{grad } \varphi + \varphi \text{grad } \psi$$

$$\text{div}(\varphi\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \mathbf{v}$$

$$\text{rot}(\varphi\mathbf{v}) = \text{grad } \varphi \times \mathbf{v} + \varphi \text{rot } \mathbf{v}$$

$$\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{w}$$

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{w} \text{div } \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \mathbf{v} \text{div } \mathbf{w}$$

$$\text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{w} \times \text{rot } \mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}$$

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi \quad (\varphi = \varphi(\mathbf{r}) \text{ tweemaal differentieerbaar})$$

$$\text{met } \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (\text{operator van Laplace})$$

$$\text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0$$

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v}$$

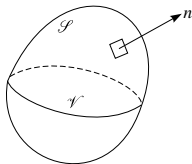
( $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  tweemaal differentieerbaar)

## 9.4 Integraalstellingen

$\mathcal{S}$  is een voldoende glad begrensde gesloten oppervlak.

$\mathcal{V}$  is het begrensde gebied binnen  $\mathcal{S}$ .

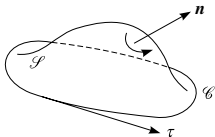
$\mathbf{n}$  is de eenheidsvector langs de naar buiten gerichte normaal (dat is van  $\mathcal{V}$  af).



In  $\mathcal{V}$  en op  $\mathcal{S}$  zijn een continu differentieerbare scalarfunctie  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  en een continu differentieerbare vectorfunctie  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  gedefinieerd. Er geldt dan:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dA = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{v} \, dV \quad (\text{stelling van Gauss})$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \varphi \, dA = \iiint_{\mathcal{V}} \text{grad } \varphi \, dV$$



$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, dA = \iiint_{\mathcal{V}} \text{rot } \mathbf{v} \, dV$$

$\mathcal{C}$  is een voldoende gladde begrensde, enkelvoudige gesloten kromme.

$\mathcal{S}$  is een voldoende glad, begrensd, tweezijdig oppervlak dat  $\mathcal{C}$  tot randkromme heeft.

$\boldsymbol{\tau}$  is de eenheidsvector langs de raaklijn aan  $\mathcal{C}$ .

De richting van  $\boldsymbol{\tau}$  is de richting waarin  $\mathcal{C}$  wordt doorlopen.

De rechts-cyclisch aan  $\boldsymbol{\tau}$  toegevoegde eenheidsvector langs de normaal op  $\mathcal{S}$  is  $\mathbf{n}$ .

In een enkelvoudig samenhangend gebied  $\mathcal{V}$ , waarin  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{S}$  zijn gelegen, zijn een continu differentieerbare scalarfunctie  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  en een continue differentieerbare vectorfunctie  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  gedefinieerd. Er geldt dan:

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \, ds = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{v} \, dA = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dA \quad \text{(stelling van Stokes)}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\tau} \varphi \, ds = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \times \nabla) \varphi \, dA = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \times \text{grad } \varphi \, dA$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v} \, ds = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{v} \, dA$$

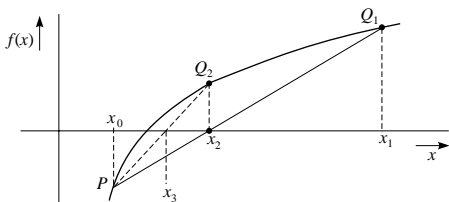
# 10 Numerieke wiskunde

Zie par. 2.7 voor nauwkeurigheid en significante cijfers.

## 10.1 Schatting nulpunten

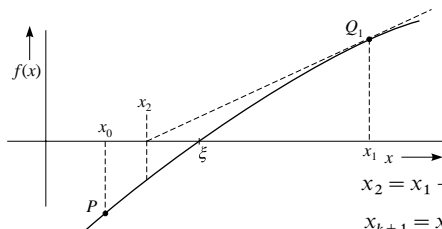
Twee methoden voor verbetering van de nauwkeurigheid van geschatte nulpunten.

### Lineaire interpolatie (regula falsi)



$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \quad (\text{recurrent gebruiken})$$

### Methode van Newton-Raphson



$$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

## 10.2 Interpolatie, differentiatie en integratie

### Lineaire interpolatie

$$y(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Procesfout:  $|E(x)| \leq \frac{1}{8}h^2 |f''(\xi)|$

waarin:  $h = x_1 - x_0$ ;  $\xi \in (x_0, x_1)$

### Interpolatiepolynoom van Lagrange

$$f(x) \approx y(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x); \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Procesfout:  $E(x) < \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x - x_k)$

N.B. Er zijn  $(n+1)$  steunwaarden  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ .

### Numerieke differentiatie

Hierbij wordt uitgegaan van een interpolerend polynoom dat gedifferentieerd wordt.

De procesfout wordt verkregen door de afbreekfout  $E(x)$  naar  $x$  te differentieren.

### Numerieke integratie

$f(x)$  in  $\int_a^b f(x) dx$  benaderen met polynoom van Lagrange.

Integratieformules ( $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ ):

– Twee-puntsformule van Euler ( $n = 1$ ):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$$

- Drie-puntsformule van Simpson ( $n = 2$ ):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

- Drie-achtste regel ( $n = 3$ ):

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

*Integraal over groot interval:* interval  $(a, b)$  verdelen in  $n$  gelijke deelintervallen:

- Formule van Euler (trapeziumregel):

$$\int_a^b f(x) dx = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right)$$

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{(2)}(\xi); \quad a < \xi < b$$

- Formule van Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n)$$

Het aantal intervallen moet *even* zijn.

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi); \quad a < \xi < b$$

## 10.3 Differentiaalvergelijkingen

Numerieke integratie van DV van de eerste orde.

### Methode van Euler en Heun

Uitgangspunten:  $y' = f(x, y)$ ;  $y(x_0) = y_0$  (beginvoorwaarde);  
 $y'(0) = f(x_0, y_0)$ .

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx$$

Praktische uitvoering:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)] = y_0 + \frac{h}{2} [f_0 + f_1^*]$$

waarin:  $y_1^* = y_0 + hy'_0$  (predictor)

$$y_0 + \frac{h}{2} [f_0 + f_1^*] \text{ is de corrector}$$

Alleen predictor gebruikt: methode van Euler.

Predictor en corrector gebruikt: methode van Heun.

Na de eerste integratiestap wordt de tweede uitgevoerd, enz:

$$y_{n+1}^* = y_n + hf_n \text{ (predictor)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f_n + f_{n+1}^*] \text{ (corrector)}$$

### Methode van Runge-Kutta

Standaard: vierde-orde methode

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]: \text{eerste stap}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

Opmerking: er bestaan interactieve simulatieprogramma's waarmee DV's numeriek zijn op te lossen.

## 10.4 Lineaire vergelijkingen

Indirecte methoden voor het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen.

### Methoden van Jacobi

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; a_{ii} \neq 0)$$

wordt geschreven als:

$$x_i^* = x_i + \left( b_i - \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right) / a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Na substitutie van de beginschatting ontstaat een iteratief proces.

### Methoden van Gauss-Seidel

Hier wordt na de beginschatting een nieuwe waarde  $x_1$  berekend, die weer in de tweede vergelijking wordt gebruikt:

$$x_i^* = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^* - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right) / a_{ii} \text{ of}$$

$$x_i^* = x_i + \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^* - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j \right) / a_{ii}$$

De \* heeft betrekking op de nieuwe waarde.

Beide methoden convergeren wanneer de matrix  $A$  diagonaal-dominant is:

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$



# Natuurkunde

---

## 1 Natuurconstanten

## 2 Decibel en neper

## 3 Vloeistoffen en gassen

- 3.1 Eigenschappen van vloeistoffen
- 3.2 Vloeistoffen in rust (hydrostatica)
- 3.3 Eigenschappen van gassen en dampen

## 4 Warmte

- 4.1 Temperatuur en temperatuurschalen
- 4.2 Uitzetting
- 4.3 Soortelijke warmte
- 4.4 Verandering van aggregatietoestand
- 4.5 Thermodynamica

## 5 Transport

- 5.1 Kengrootheden
- 5.2 Stroming van onsamendrukbare vloeistoffen
- 5.3 Formules van Bernoulli voor ideale gassen
- 5.4 Toepassingen wet van Bernoulli
- 5.5 Stroming door cilindrische buizen
- 5.6 Wrijving in cilindrische buizen
- 5.7 Stroming door niet-cilindrische buizen
- 5.8 Verliezen in openingen en appendages
- 5.9 Omstroming van vaste lichamen
- 5.10 Stroming door kanalen en goten
- 5.11 Modelregels
- 5.12 Stationair warmtetransport door geleiding
- 5.13 Stationair warmtetransport door convectie
- 5.14 Stationair warmtetransport door geleiding en convectie
- 5.15 Stationair warmtetransport door straling

5.16 Niet-stationaire warmtegeleiding

5.17 Stoftransport

## **6 Trillingen en geluid**

6.1 Harmonische trilling

6.2 Lopende golven

6.3 Staande golven

6.4 Trilling van snaren en luchtkolommen (orgelpijpen)

6.5 Doppler-effect

6.6 Geluidsleer (akoestiek)

## **7 Licht en optica**

7.1 Lichtsnelheid

7.2 Terugkaatsing (reflectie)

7.3 Breking (refractie)

7.4 Lenzen

7.5 Vergroting, optische instrumenten

7.6 Interferentie en buiging

7.7 Glasvezelkabel

7.8 Straling en licht

7.9 Kleuren en kleurmeetkunde

7.10 Fotometrie

## **8 Elektriciteitsleer**

8.1 Elektrostatica

8.2 Elektrodynamica, stroomgeleiding

8.3 Wisselstromen

8.4 Magnetostatica

8.5 Elektromagnetisch veld

8.6 Vergelijkingen van Maxwell

## **9 Magnetisme**

9.1 Typen magnetisme

9.2 Hysteresislus

9.3 Permanente magneten

## **10 Contactpotentiaal, thermo-elektriciteit**

10.1 Contactpotentiaal en volta-spanning

10.2 Thermo-elektriciteit

# 1 Natuurconstanten

Tabel 1.1 Meest voorkomende natuurconstanten (in technische notatie, zie [pa. 1 1](#))

constante	sym-bool	waarde	* = exact	eenheid
Lichtsnelheid in vacuüm	$c(c_0)$	$299,792458 \times 10^6$	*	m/s
Permeabiliteit van vacuüm	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	*	
Permittiviteit van vacuüm	$\varepsilon_0$	$\approx 1,256637 \times 10^{-6}$ $= 1/(\mu_0 \cdot c^2)$ $\approx 8,854188 \times 10^{-12}$	*	H/m = N/A <sup>2</sup> F/m
Gravitatieconstante	$G$	$66,7259 \times 10^{-12}$		m <sup>3</sup> /(kg·s <sup>2</sup> )
Elementaire lading	$e$	$0,1602177 \times 10^{-18}$		C
Constante van Planck	$h$	$0,662608 \times 10^{-33}$		J·s
Constante van Dirac $h/2\pi$	$\hbar$	$0,105457 \times 10^{-33}$		J·s
Constante van Avogadro	$N_A, L$	$0,602214 \times 10^{27}$		kmol <sup>-1</sup>
Constante van Faraday $N_A \cdot e$	$F$	$96,4853 \times 10^6$		C/kmol
Molaire gasconstante	$R$	$8,31451 \times 10^3$		J/(kmol·K)
Molair volume $R \cdot T_n / p_n$ <sup>1)</sup>	$V_m$	22,4141		m <sup>3</sup> /kmol
Constante van Boltzmann $R/N_A$	$k$	$13,8066 \times 10^{-24}$		J/K
Constante van Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$56,7051 \times 10^{-9}$		W/(m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup> )
Eerste stralingsconstante $2\pi hc^2$	$c_1$	$0,374177 \times 10^{-15}$		W·m <sup>2</sup>
Tweede stralingsconstante $hc/k$	$c_2$	$14,3877 \times 10^{-3}$		m·K
Rustmassa elektron	$m_e$	$0,910939 \times 10^{-30}$		kg
Rustmassa proton	$m_p$	$1,67262 \times 10^{-27}$		kg
Proton-elektron massaverhouding	$m_p/m_e$	$1,8361527 \times 10^3$		
Rustmassa neutron	$m_n$	$1,67493 \times 10^{-27}$		kg
Rustmassa deutron	$m_d$	$3,34359 \times 10^{-27}$		kg
(Geünificeerde) atoommassa-constante	$m_u$	$1,66054 \times 10^{-27}$		kg
Von Klitzing-constante $h/e^2$	$R_k$	$25,8128 \times 10^3$		$\Omega$
Standaardversnelling v.d. vrije val	$g_n$	9,80665	*	m/s <sup>2</sup>

<sup>1)</sup>  $p_n = 101\,325$  Pa,  $T_n = 273,15$  K

Bron: CODATA-bulletin 63, nov. 1986.

## 2 Decibel en neper

Van de verhouding van twee gelijkwaardige grootheden wordt vaak de logaritme gegeven. Hiermee verkrijgt men de grootheid  $L$ , uitgedrukt in de dimensieloze eenheden *decibel* (dB) of *neper* (Np):

- $L$  in dB in geval van grondtal 10.
- $L$  in Np in geval van grondtal  $e$ .

Algemeen:

$$L = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 20 \log \frac{X_2}{X_1} \quad \text{dB} \qquad 1 \text{ dB} \approx 0,115129 \text{ Np}$$

of:

$$L = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \frac{X_2}{X_1} \quad \text{Np} \qquad 1 \text{ Np} \approx 8,68589 \text{ dB}$$

waarin:

$P$  = vermogen

$X$  = grootheid waarvan het kwadraat evenredig is met  $P$  (bijv. spanning, stroom, druk)

$X_1$  en  $X_2$  moeten onder gelijke omstandigheden worden gemeten, bijv. over gelijke weerstanden.

Aan  $L$  wordt een absolute waarde toegekend wanneer de logaritme wordt genomen van de verhouding  $P_2/P_0$ , resp.  $X_2/X_0$ . Hierin zijn  $P_0$  en  $X_0$  *referentie- of nulniveaus*. Gebruikelijk zijn:

- Elektrisch:  $P_0 = 1 \text{ mW}$  ( $L$  in dBm)  
 $U_0 \approx 0,774597 \text{ V}$  ( $600 \Omega$ ,  $1 \text{ mW}$ ,  $L$  in dBV.7)  
 $I_0 \approx 1,29099 \text{ mA}$  ( $600 \Omega$ ,  $1 \text{ mW}$ ,  $L$  in dBmA)
- Akoestisch:  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  (geluidsintensiteit)  
 $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$  (geluidsdruk)

$L$  in dB<sub>r</sub>: aantal dB t.o.v. bepaald niveau (bijv.ingangsspanning van een circuit).

$L$  in dB(A): zie [par. 6.6 Geluidisleer](#).

In het bijzonder onderscheidt men:

- *Amplitudeniveauverschil*:  $L_A = 20 \log \frac{A_2}{A_1} \text{ dB} = \ln \frac{A_2}{A_1} \text{ Np}$
- *Vermogensniveauverschil*:  $L_p = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} \text{ Np}$

$L_A$  wordt gewoonlijk uitgedrukt in Np,  $L_p$  in dB.

### 3 Vloeistoffen en gassen

#### Symbolen

$A$	= oppervlakte [ $\text{m}^2$ ]
$a$	= absolute vochtigheid [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ] van der Waalsconstante [ $\text{J}\cdot\text{m}^3/\text{kmol}^2$ ]
$b$	= van der Waalsconstante [ $\text{m}^3/\text{kmol}$ ]
$d$	= relatieve dichtheid (= $\rho_v$ ) [ $-$ ]
$e$	= relatieve vochtigheid [ $-$ ]
$F$	= kracht [N]; $F_h$ = hydrostatische kracht [N]
$G$	= gewicht [N]
$g$	= zwaarteveldsterkte [ $\text{N}/\text{kg}$ ]
$h$	= (opstijg)hoogte [m]
$K$	= compressiemodulus [Pa]
$l$	= lengte [m]
$M$	= molaire massa [ $\text{kg}/\text{kmol}$ ]; $M_r$ = relatieve molecuul- massa ( $M$ en $M_r$ zijn van dezelfde stof gelijk in getal- waarde), zie ook <a href="#">hoofdstuk Eenheden en Symbolen</a> , <a href="#">par. 1.1</a>
$m$	= massa [kg]
$P$	= maximale dampspanning [Pa]
$p$	= druk [Pa]; $p_h$ = hydrostatische druk [Pa]
$p_n$	= normaaldruk = 101 325 Pa
$R$	= molaire gasconstante [ $\text{J}/(\text{kmol}\cdot\text{K})$ ]
$R_s$	= specifieke gasconstante [ $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ]
$r$	= straal [m]
$T$	= thermodynamische temperatuur [K]
$T_n$	= normaaltemperatuur = $0^\circ\text{C}$
$v$	= snelheid [m/s]
$\eta$	= dynamische viscositeit [ $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]
$\vartheta$	= relatieve volumeverandering [ $-$ ]
$\kappa$	= compressibiliteit [ $\text{Pa}^{-1} = \text{m}^2/\text{N}$ ]
$\nu$	= kinematische viscositeit [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\rho$	= soortelijke massa (dichtheid) vloeistof of gas [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\rho_n$	= dichtheid bij $p_n$ , $T_n$
$\sigma(\gamma)$	= oppervlaktespanning [ $\text{N}/\text{m}$ ]
$\tau$	= schuifspanning [N]

### 3.1 Eigenschappen van vloeistoffen

#### Compressibiliteit (samendrukbaarheid)

De compressibiliteit  $\kappa$  is gedefinieerd als:

$$\kappa = - \frac{\Delta V}{V} \bigg/ \Delta p = - \frac{\Delta V}{\Delta p} \cdot \frac{1}{V} \quad (\text{bij } T = \text{constant})$$

waarin:

$\Delta V/V$  = relatieve volumeverandering (=  $\vartheta$ )

$\Delta p$  = alzijdig aangebrachte drukverhoging

$$\text{Compressiemodulus: } K = \frac{1}{\kappa} = - \Delta p / \vartheta$$

Zie ook par. [, tabel 1.1](#)

#### Viscositeit

De dynamische viscositeit  $\eta$  wordt gedefinieerd voor een laminair stromende vloeistof:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

waarin:  $dv/dy$  = snelheidsverval loodrecht op stroomsnelheid gemeten

*Newton-vloeistof*:  $\eta = \text{constant}$ .

*Pseudo-plastische vloeistof*:  $\eta$  neemt af bij toenemende  $dv/dy$ .

*Dilatante vloeistof*:  $\eta$  neemt toe bij toenemende  $dv/dy$ .

*Visco-elastische stof*: gedrag beneden  $\tau_f$  als vaste stof, boven  $\tau_f$  als vloeistof.

(Zie ook par. [, tabel 1.2](#)).

De kinematische viscositeit  $\nu$  wordt in de stromingsleer ook toegepast:  $\nu = \eta/\rho$ .

#### Oppervlaktespanning (grensvlakspanning)

In ieder vloeistofoppervlak heerst een tangentiële kracht  $F$ , die gelijk is aan de oppervlaktespanning  $\sigma$  maal de lengte  $l$  van de lijn waarop die kracht werkt:

$$F = \sigma \cdot l$$

Overdruk in zeepbel met straal  $r$ :

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$$

Zie ook par. [3.1](#), tabel 1.3 (2).

### Capillaire werking

*Cohesie* = aantrekkende werking tussen gelijksoortige moleculen.

*Adhesie* = aantrekkende werking tussen ongelijksoortige moleculen (bijv. van vloeistof en glas).

Vloeistof tegen glaswand:

- holle meniscus: adhesie > cohesie;
- bolle meniscus: adhesie < cohesie.

Volledige bevochtiging mogelijk bij grote adhesie.

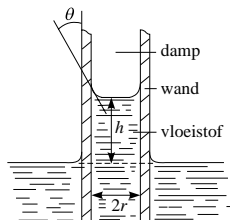
Capillair in vloeistof gestoken:

- vloeistof stijgt op:  
adhesie > cohesie;
- vloeistof in capillair wordt neergedrukt:  
adhesie < cohesie.

**Opstijghoogte** in capillair  
(straal  $r$ )

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} \cos \theta$$

waarin:  $\theta$  = contacthoek



Figuur 3.1 Opstijghoogte  $h$  in capillair

## 3.2 Vloeistoffen in rust (hydrostatica)

Hydrostatische kracht  $F_h$  op een vlak in een vloeistof is de kracht op dat vlak ten gevolge van het gewicht van de vloeistof:

$$F_h = \rho g h_z A$$

waarin:

$A$  = oppervlakte waarop de kracht werkt

$h_z$  = loodrecht gemeten afstand van het massamiddelpunt van het vlak tot de vloeistofspiegel

*Hydrostatische druk*  $p_h$  = hydrostatische kracht per eenheid van oppervlakte:

$$p_h = \rho g h_z$$

In een horizontaal vlak in eenzelfde vloeistof in rust is de hydrostatische druk overal even groot.

*Wet van Pascal*: een druk, op een vloeistof uitgeoefend, plant zich in alle richtingen met dezelfde grootte voort.

### Vast lichaam op/in een vloeistof

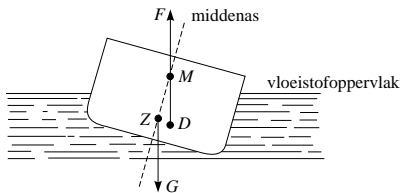
*Wet van Archimedes*: een lichaam, geheel of gedeeltelijk in een vloeistof ondergedompeld, ondervindt een opwaartse kracht, die gelijk is aan het gewicht van de verplaatste vloeistof.

Een lichaam zinkt, zweeft, resp. drijft als:

$\rho_{\text{lich.}}$  is groter dan, gelijk aan, resp. kleiner dan  $\rho_{\text{vloeistof}}$

### Evenwicht van drijvend lichaam (schip):

- *stabiel*: als lichaam na verstoring in de oorspronkelijke stand terugkomt;
- *labiel*: als lichaam na verstoring omslaat.



Figuur 3.2 Evenwicht drijvend lichaam (N.B.  $|F| = |G|$  = gewicht van het lichaam)



*Voorwaarde voor stabiel evenwicht:* metacentrum  $M$  moet boven het massamiddelpunt  $Z$  liggen.

*Metacentrum  $M$*  = snijpunt van de lijn van opwaartse kracht  $F$  met de middenas van het lichaam.

*Drukkingspunt  $D$*  = aangrijpingspunt van de opwaartse kracht.  
= massamiddelpunt van de verplaatste vloeistof.

**Toepassingen van de hydrostatica:** peilglas, flesjeswaterpas, vloeistofmanometer, hydraulische pers, olievijzel, enz.

### 3.3 *Eigenschappen van gassen en dampen*

**Damp** = gasvormige toestand van een stof zoals die zich voordoet beneden de kritische temperatuur (zie 4.4) (in wezen is er geen verschil tussen damp en gas).

*Dampspanning* = dampdruk (eenheid: Pa).

**Molaire massa:**  $M$  = massa van het gas per kmol.

Van ieder gas bevat 1 kmol evenveel moleculen of atomen:

$$N_A \approx 602,2 \times 10^{24} \quad (\text{constante of getal van Avogadro})$$

**Wet van Avogadro:** gelijke volumens van ideale gassen bevatten bij gelijke druk en temperatuur een gelijk aantal moleculen.

**Molair volume:**  $V_m$  = volume van 1 kmol ideaal gas, gemeten bij een druk van  $p_n = 101\,325$  Pa (1 atm) en een temperatuur van  $T_n = 273,15$  K (= 0 °C).

$$V_m \approx 22,4 \text{ m}^3$$

**Dichtheid  $\rho_n$ :** gegeven voor  $p_n$  en  $T_n$  (zie hierboven) = soortelijke of specifieke massa. Zie ook par. ,

tabel 1.4 (1).

De **relatieve dichtheid**  $d$  of  $\rho_v$  wordt gegeven ten opzichte van een standaardgas:

$$d = \frac{\rho_{\text{gas}}}{\rho_{\text{standaardgas}}}$$

Gebruikelijke standaardgassen zijn lucht en waterstof ( $H_2$ ).

$$d_{\text{gas t.o.v. } H_2} = \frac{M_r}{2,016}$$

**Ideaal gas:** gas of damp met puntvormige moleculen, geen cohesie-krachten tussen de moleculen (hieraan voldoen bijv.  $H_2$ , He, onverzadigde dampen).

*Algemene gaswet (Boyle-Gay Lussac):*

$$pV = \text{const.} \cdot T, \text{ voor } m = \text{constant}$$

Voor  $n$  kmol van een ideaal gas is:

$$pV = nRT$$

waarin:  $R = \text{molaire of universele gasconstante}$   
 $\approx 8314,51 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$

Voor een willekeurige massa  $m$  van een ideaal gas geldt:

$$pV = \frac{m}{M}RT = mR_sT$$

waarin:  $R_s = \text{specifieke gasconstante} = \frac{R}{M}$

**Normaal volume** = volume van een zekere massa van een gas of damp bij  $p_n = 101\,325 \text{ Pa}$  en  $T_n = 273,15 \text{ K}$  ( $0^\circ \text{C}$ )

$$V_n = \frac{p}{p_n} \cdot \frac{T_n}{T} \cdot V$$

waarin:  $V$  = volume van dezelfde massa van het gas bij druk  $p$  en temperatuur  $T$

### **Massaformule**

Massa gas of damp met volume  $V$ , druk  $p$  en temperatuur  $T$ :

$$m = \rho_n V_n = \rho_n V \frac{p}{p_n} \cdot \frac{T_n}{T}$$

Tabel 3.1 Vanderwaalsconstanten

stof	$a$ [ $\text{J} \cdot \text{m}^3/\text{kmol}^2$ ]	$b$ [ $\text{m}^3/\text{kmol}$ ]
Helium	$3,5 \cdot 10^3$	$22 \cdot 10^{-3}$
Waterstof	$25 \cdot 10^3$	$26 \cdot 10^{-3}$
Zuurstof	$140 \cdot 10^3$	$31 \cdot 10^{-3}$
Stikstof	$140 \cdot 10^3$	$39 \cdot 10^{-3}$
Koolstofdioxide	$360 \cdot 10^3$	$44 \cdot 10^{-3}$
Water	$550 \cdot 10^3$	$30,5 \cdot 10^{-3}$

### Niet-ideale (reële) gassen

Voor *niet-ideale gassen* geldt de algemene gaswet van *Boyle-Gay Lussac niet*. Er moeten correctietermen aangebracht worden.

*Toestandsvergelijking van Van der Waals* voor  $n$  kmol gas:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

$a$  en  $b$  zijn de *Vanderwaalsconstanten* (zie tabel 3.1)

$$a = 3p_k (V_{\text{mk}})^2 \quad b = \frac{1}{3} V_{\text{mk}}$$

waarin:  $p_k$  = kritische druk  
 $V_{\text{mk}}$  = kritisch molvolume

### Mengsels van gassen en dampen

*Wet van Dalton*: de spanning van een *mengsel* van gassen en/of dampen is gelijk aan de som van de spanningen die ieder gas (damp) afzonderlijk in de betreffende ruimte zou hebben.

Voorwaarde is dat de temperatuur van de gassen en dampen gelijk is en blijft.

### Waterdamp in lucht:

- *Verzadigingsdruk*: maximale dampspanning ( $P$ ) bij bepaalde temperatuur.
- *Relatieve vochtigheid  $e$* : verhouding van de spanning ( $p$ ), die de waterdamp in de lucht heeft, en de verzadigingsdruk bij de heersende temperatuur:

$$e = \frac{P}{P} = 100 \frac{P}{P} (\%)$$

- *Dauwpunt van vochtige lucht* = temperatuur van een lichaam in die lucht, waarop bij afkoeling van dat lichaam de waterdamp begint te condenseren.
- *Absolute vochtigheid a* = massa aanwezige waterdamp per m<sup>3</sup> lucht.

Voor de verzadigingsdruk van waterdamp zie , tabel 3.1; andere sto en par. ,  
tabel 1.8.

## 4 Warmte

### Symbolen

$c$	= soortelijke warmte [J/(kg·K)]
$C$	= molaire soortelijke warmte [J/(kmol·K)], warmtecapaciteit [J/K]
$F$	= vrije energie [J]
$G$	= vrije enthalpie [J]
$H$	= enthalpie [J]
$K_k$	= molaire kookpuntsverhoging [kg·K/kmol]
$K_v$	= molaire vriespuntsverlaging [kg·K/kmol]
$l$	= lengte [m], soortelijke overgangsenergie [J/kg]
$m$	= massa [kg]
$M$	= molaire massa [kg/kmol]
$n$	= hoeveelheid stof [kmol]
$p$	= druk [Pa]; $p_n = 101\,325$ Pa (= 1 atm)
$Q$	= hoeveelheid warmte [J];
$\Delta Q$	= hoeveelheid toegevoerde warmte [J]
$R$	= molaire gasconstante [J/(kmol·K)]
$R_s$	= specifieke gasconstante [J/(kg·K)]
$S$	= entropie [J/K]
$T$	= thermodynamische temperatuur [K]
$t$	= Celsius-temperatuur [°C]
$U$	= inwendige energie [J]
$V$	= volume [m <sup>3</sup> ]
$W$	= arbeid, energie [J]

$\alpha$	= lineaire uitzettingscoëfficiënt [ $\text{K}^{-1}$ ]
$\gamma$	= kubieke uitzettingscoëfficiënt [ $\text{K}^{-1}$ ]
$\gamma(\kappa)$	= soortelijke warmteverhouding $c_p/c_v$ [–]
$\varepsilon$	= compressieverhouding [–]
$\eta$	= rendement [–]
$\theta$	= Celsius-temperatuur [ $^{\circ}\text{C}$ ]
$\varphi$	= verbrandingsverhouding [–]

## 4.1 *Temperatuur en temperatuurschalen*

*Thermodynamische (= absolute) temperatuur:* symbool  $T$ , eenheid kelvin (K). Voor de Definitie: zie [hoofdstuk Eenheden en symbolen](#), pa . 11.

*Celsius-temperatuur:* symbool  $t$  of  $\theta$ , eenheid  $^{\circ}\text{C}$ .

*Fahrenheit-temperatuur:* symbool  $t$  of  $\theta$ , eenheid  $^{\circ}\text{F}$ .

Omrekeningen voor temperaturniveaus:

$$x\text{K} = (x - 273,15)^{\circ}\text{C} = (9/5x - 459,67)^{\circ}\text{F}$$

$$x^{\circ}\text{C} = (x + 273,15)\text{K} = 9/5x + 32^{\circ}\text{F}$$

$$x^{\circ}\text{F} = 5/9(x - 32)^{\circ}\text{C} = 5/9(x + 459,67)\text{K}$$

Voor temperatuurverschillen:  $1\text{K} = 1^{\circ}\text{C} = 1,8^{\circ}\text{F}$ .

*Opmerking.* Exact is:  $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15$ , niet 273,16 omdat het tripelpunt van water bij  $+0,01^{\circ}\text{C}$  ligt.

## 4.2 *Uitzetting*

**Uitzetting van vaste stoffen en vloeistoffen**

*Lineaire* uitzetting, alleen voor vaste stoffen:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t \quad \text{of} \quad l_2 = l_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)]$$

*Kubieke* uitzetting van vaste lichamen en vloeistoffen:

$$\Delta V = \gamma V \Delta t \quad \text{of} \quad V_2 = V_1 [1 + \gamma(t_2 - t_1)]$$

$$\gamma \approx 3\alpha$$

waarin:

$l_1, V_1$  = lengte resp. volume bij temperatuur  $t_1$

$l_2, V_2$  = lengte resp. volume bij temperatuur  $t_2$

Waarden van resp. : zie par. [Fysische gegevens, tabel 1.3\(4\)](#), resp. 1.5 t/m 1.7 (3).

## Uitzetting van gassen

Voor alle ideale gassen geldt:  $\gamma = \frac{1}{273,16} \approx 3,66086 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

(Zie ook: [toestandsveranderingen](#), par. 4.5).

## 4.3 Soortelijke warmte

Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.3 \(5\)](#) en 1.5 t/m 1.7 (4).

*Warmte* is een vorm van energie. Een hoeveelheid warmte ( $Q$ ) wordt uitgedrukt in een aantal joules (J) en hangt bijv. samen met de temperatuur van een lichaam:  $\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ .

*Soortelijke warmte* ( $c$ ): de hoeveelheid warmte nodig om 1 kg van de stof 1 K in temperatuur te doen stijgen.

Voor  $m$  kg geldt:  $\Delta Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ .

*Warmtecapaciteit* ( $C$ ) van een lichaam of systeem: de hoeveelheid warmte om  $m$  kg van de stof 1 K in temperatuur te doen stijgen:

$$C = m \cdot c = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

## Gassen

Bij *gassen* onderscheidt men:

- $c_p$  = soortelijke warmte bij constante *druk*, zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.4 \(3\)](#);
- $c_v$  = soortelijke warmte bij constant *volume*.

Voor 1 kmol gas worden gebruikt:  $C_p$  resp.  $C_v$

$$C_p - C_V = R \text{ en } c_p - c_V = \frac{R}{M} = R_s$$

$$C_p = M c_p \text{ en } C_V = M c_V$$

Soortelijke-warmteverhouding  $\gamma = c_p/c_V$  (zie ook gegevens, tabel 1.4(4)):

- $\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$  voor één-atomige gassen;
- $\gamma = \frac{7}{5} = 1,40$  voor twee-atomige gassen;
- $\gamma = \frac{4}{3} = 1,33$  voor drie-atomige gassen.

### Mengsels en oplossingen

Als  $m_1$  kg van een stof met temperatuur  $T_1$  en soortelijke warmte  $c_1$  wordt gemengd met  $m_2$  kg van een tweede stof ( $T_2, c_2$ ) dan is de soortelijke warmte van het mengsel:

$$c_m = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$$

en de temperatuur van het mengsel:

$$T_m = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

mits geen chemische reactie, warmteontwikkeling of warmte-absorptie plaatsvindt.

Voor oplossingen van zouten in water geldt:

$$c_{\text{opl}} \approx \left(1 - \frac{p_m}{100}\right) c_{\text{H}_2\text{O}}$$

waarin:  $p_m$  = gewichtspercentage zout in water

## 4.4 Verandering van aggregatietoestand

Normale smelttemperatuur (ook *smeltpunt*) van een stof: de temperatuur, waarbij onder een druk  $p_n$  de vaste en vloeibare fase tegelijk kunnen bestaan.

De temperatuur van het smeltpunt is gelijk aan die van het *stolpunt* (ook *vriespunt* genoemd).

Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.3 \(7\)](#), [1.4 t/m 1.6 \(6\)](#).

*Kookpunt* van een vloeistof: die temperatuur, waarbij de verzadigingsdruk gelijk is aan de druk op de vloeistof. Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.3 \(9\)](#), [1.4 \(7\)](#) en [1.9](#).

Het *normale* kookpunt wordt gedefinieerd bij een druk  $p_n$ .

*Soortelijke smeltingswarmte* = *soortelijke stollingswarmte* ( $l_{32}$ ): hoeveelheid warmte die nodig is (resp. vrijkomt) om 1 kg van een stof te doen smelten (stollen) bij zijn smeltpunt. Zie ook par.

[Fysische gegevens, tabel 1.3 \(8\)](#), [1.5 \(7\)](#) en [1.7 \(7\)](#).

Een kleine concentratie van een stof in een oplosmiddel geeft een *vriespuntsverlaging* van het zuivere oplosmiddel volgens:

$$\Delta T = K_v \frac{n}{m_L} \quad (\text{wet van Van 't Hoff})$$

waarin:  $K_v$  = molaire vriespuntsverlaging v.h. oplosmiddel (zie ook hoofdstuk [Scheikunde, tabel 2.13](#))

$n$  = aantal kmol opgeloste stof

$m_L$  = massa oplosmiddel

Bij *koken* vindt verdamping plaats. De overgang van dampfase naar vloeistoffase heet *condenseren*.

*Soortelijke verdampingswarmte* = *soortelijke condensatiewarmte* ( $l_{21}$ ): hoeveelheid warmte die toegevoerd moet worden (vrijkomt) om 1 kg van een vloeistof bij zijn kookpunt geheel te verdampen (condenseren). Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.3 \(10\)](#) en [1.4 \(8\)](#).

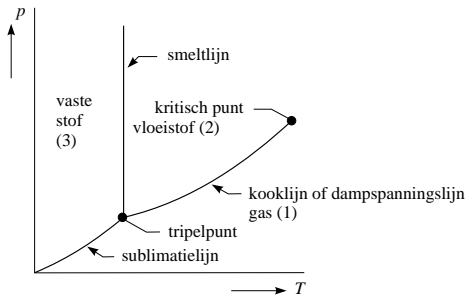
*Kookpuntsverhoging* vindt plaats t.g.v. kleine concentraties van een stof in een oplosmiddel volgens:

$$\Delta T = K_k \frac{n}{m_L}$$

waarin:  $K_k$  = molaire kookpuntsverhoging v.h. oplosmiddel (zie ook hoofdstuk [Scheikunde, tabel 2.13](#))

*Sublimeren*: het proces waarbij een stof direct van de vaste fase in





Figuur 4.1  $pT$ -fasediagram

de dampfase overgaat zonder in de vloeistoffase te verkeren. Bij stoffen die deze eigenschap vertonen spreekt men van het *sublimatiepunt* i.p.v. kookpunt. Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.10](#).

*Rijpen*: het proces waarbij een stof direct van de dampfase in de vaste fase overgaat.

*Vloeibaar maken van gassen*:

- *Kritische temperatuur*: boven deze temperatuur kan een gas niet vloeibaar worden gemaakt, hoe hoog de druk ook opgevoerd wordt. Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.3 \(11\)](#) en [1.4 \(9\)](#).
- *Kritische druk*: de minimum druk, die nodig is om een gas bij de kritische temperatuur vloeibaar te maken. Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.3 \(12\)](#) en [1.4 \(10\)](#).
- *Kritisch volume*: het volume van een bepaalde hoeveelheid gas bij de kritische temperatuur en kritische druk.

## 4.5 Thermodynamica

### Eerste hoofdwet (Wet van behoud van energie)

In een afgesloten systeem is de algebraïsche som van alle energie-

veranderingen gelijk aan nul. (Warmte en arbeid zijn beide vormen van energie.)

De *inwendige energie* van een systeem ( $U$ ) is een toestandsgrrootheid en voldoet aan:

$$dU = \Delta Q - \Delta W$$

waarin:

$dU$  = kleine toename van  $U$

$\Delta Q$  = kleine hoeveelheid toegevoerde warmte

$\Delta W$  = kleine hoeveelheid verrichte arbeid

Voor een gas is  $\Delta W = pdV$ .

Voor een kringproces van een gesloten systeem is

$$U_2 = U_1 \text{ en } \oint \Delta Q = \oint \Delta W$$

### Toestandsveranderingen van een ideaal gas

Algemene formules voor 1 kmol:

$$pV = RT \quad R = C_p - C_v$$

$$dU = C_v dT$$

$$\Delta Q = \frac{C_v}{R} V dp + \frac{C_p}{R} p dV$$

### Tweede hoofdwet (Wet van de ontaarding van energie)

*Quasistatisch proces* = proces, waarbij het systeem op elk moment in evenwicht is (= omkeerbaar (reversibel) proces).

*Niet-quasistatisch proces* = niet-omkeerbaar (irreversibel) proces = *vanzelf verlopend* proces; hieraan voldoen de meeste reële processen.

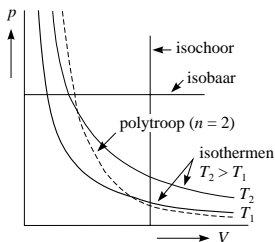
Vormen van de tweede hoofdwet:

- Het is onmogelijk een kringproces te beschrijven waarbij met behulp van slechts één warmtebron warmte in arbeid omgezet kan worden (beginsel van *Kelvin*).
- Het is onmogelijk een kringproces to beschrijven waarbij zonder arbeid te verrichten, warmte van lagere naar hogere temperatuur wordt overgebracht (beginsel van *Clausius*).

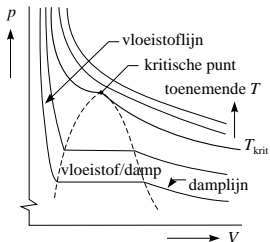
Tabel 4.1 Overzicht toestandsverandering ideaal gas

toestandsverandering	constant	$dU$	$\Delta Q$	$\Delta W$	opmerking
Isobaar	$p$	$C_V dT$	$C_p dT$	$p \int_1^2 dV$	
Isochoor	$V$	$C_V dT$	$C_V dT$	0	
Isotherm	$T$	0	$RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ $RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\Delta Q$	
Adiabatisch (Isentropisch)	Poisson: $pV^\gamma$ $TV^{\gamma-1}$ $T^\gamma p^{1-\gamma}$ $H$	$C_V dT$	0	$p dV$ $= -C_V dT$ $= -\frac{R}{\gamma-1} dT$	$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  Enthalpie: $H = U + pV$
Polytropisch	$pV^n$ $TV^{n-1}$ $T^n p^{1-n}$	$C_V dT$	$C dT$	$-\frac{R}{n-1} dT$ $= (C - C_V) dT$	$C = \frac{nC_V - C_p}{n-1}$  $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$

$n = 0: C = C_p$  (isobaar)       $n = \gamma: C = 0$  (adiabaat = isentroop)  
 $n = 1: C = \infty$  (isotherm)       $n = \infty: C = C_V$  (ischoor)



Figuur 4.2  $pV$ -diagram



Figuur 4.3  $pV$ -isothermen

## Entropie

Als aan een lichaam bij temperatuur  $T$  een hoeveelheid warmte  $\Delta Q$  wordt toegevoerd, waardoor dat lichaam een toestandsverandering ondergaat, dan verandert de *entropie*  $S$ :

– omkeerbaar proces:  $\frac{\Delta Q}{T} = dS$  of  $\int_1^2 \frac{\Delta Q}{T} = S_2 - S_1$

– niet-omkeerbaar proces:  $\frac{\Delta Q}{T} \leq dS$  of  $\int_1^2 \frac{\Delta Q}{T} \leq S_2 - S_1$

( $S_1$  hoort bij toestand 1,  $S_2$  hoort bij toestand 2).

Kringproces $\rightarrow$	omkeerbaar	niet-omkeerbaar
algemeen	$\oint \frac{\Delta Q}{T} = 0$	$\oint \frac{\Delta Q}{T} \leq 0$
adiabatisch	$S_2 = S_1$	$S_2 > S_1$

Voor een ideaal gas geldt per kmol:

$$TdS = dU + pdV$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Voor de entropie in een bepaalde toestand ( $p, V, T$ ) van het gas geldt:

$$S = C_p \ln V + C_V \ln p$$

$$S = C_V \ln T + R \ln V$$

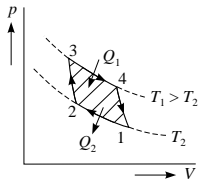
$$S = C_p \ln T - R \ln p$$

## Kringprocessen

*Carnot* (warmtemotor)

1–2, 3–4 isothermen

2–3, 4–1 adiabaten (isentropen)



Figuur 4.4 Carnot-proces

$$\text{Rendement: } \eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

*Otto* (viertakmotor)

2-3, 4-1 isochoren

1-2, 3-4 adiabaten (isentropen)

$$\text{Rendement: } \eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$$

waarin:  $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$  = compressieverhouding en  $\gamma = C_p/C_v$

*Diesel* (dieselmotor)

1-2, 3-4 adiabaten (isentropen)

2-3 isobaar

4-1 isochoor

$$\text{Rendement: } \eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\varphi^\gamma - 1}{\varphi - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}$$

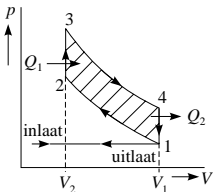
waarin:  $\varphi = \frac{V_3}{V_2}$  = verbrandingsverhouding

*Stirling* (heteluchtmotor, uitgerust met zuiger en verdringer)

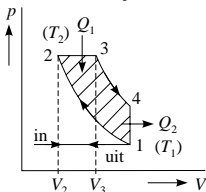
1-2, 3-4 isochoren

2-3, 4-1 isothermen

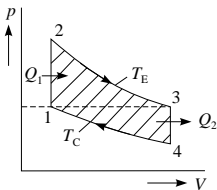
$$\text{Rendement: } \eta = \frac{T_E}{T_E + T_C}$$



Figuur 4.5 Otto-proces



Figuur 4.6 Diesel-proces



Figuur 4.7 Stirling-proces

Algemeen is de door het proces (= motor) verrichte arbeid  $W$  evenredig met het gearceerde oppervlak.

Rendement van technisch kringproces:

$$\eta = \frac{W}{Q_1}$$

### Algemene formules

Voor de verandering van  $U$  met  $V$  bij  $T = \text{constant}$ :

$$\text{Helmholtz: } \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = -p + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Voor het geval  $\Delta Q = dU = 0$  (Joule-effect):

$$C_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = p - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Voor de adiabatische *smoorproef*, waarbij  $H = \text{constant}$  (Joule-Kelvin-effect):

$$C_p \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = -V + T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

### Karakteristieke functies (toestandsfuncties)

Inwendige energie

$$U = f(S, V) \quad dU = TdS - pdV$$

Enthalpie

$$H = U + pV \quad dH = TdS + Vdp$$

Vrije energie (Helmholtz-functie)

$$F = U - TS \quad dF = -SdT - pdV$$

Vrije enthalpie (Gibbs-functie)

$$G = H - TS \quad dG = -SdT + Vdp$$

### Betrekkingen van Maxwell

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_V & \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_S &= \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_p \\ \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V & \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T &= - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

### Soortelijke warmte

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

$$C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_v$$

**Wet van Clapeyron** (betrekking van *Clausius-Clapeyron*) geldt voor (zie *pT*-diagram, fig. 4.1):

- soortelijke verdampingswarmte  $l_{21}$  langs de dampspanningslijn;
- soortelijke smeltwarmte  $l_{32}$  langs de smeltlijn;
- soortelijke sublimatiewarmte  $l_{31}$  langs de sublimatielijn.

Gaande van fase a naar fase b is algemeen:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l_{ab}}{T(V_b - V_a)}$$

## 5 Transport

### Symbolen (algemeen en stromingsleer)

$A$	= doorsnede, oppervlakte [ $m^2$ ]	
$b$	= breedte [ $m$ ]	
$c$	= geluidssnelheid [ $m/s$ ]	
$c_f$	= wrijvingsweerstandscoefficiënt [ $-$ ]	} voor omstroomde lichamen
$c_L$	= draagkracht (lift) coëfficiënt [ $-$ ]	
$c_p$	= drukweerstandscoefficiënt [ $-$ ]	
$c_w$	= weerstandscoefficiënt [ $-$ ]	
$D, d$	= diameter [ $m$ ]	
$F_f$	= wrijvingskracht [ $N$ ]	
$F_L$	= draagkracht [ $N$ ]	
$F_w$	= weerstandskracht [ $N$ ]	
$G$	= gewicht [ $N$ ]	
$g$	= zwaarteveldsterkte [ $N/kg$ ]	
$H$	= enthalpie [ $J$ ]	
$h$	= hoogte [ $m$ ];	
$h_v$	= verlieshoogte [ $m$ ]	
$I$	= verhang [ $-$ ]	
$l$	= lengte; diameter [ $m$ ]	
$M$	= molaire massa [ $kg/kmol$ ]	
$P$	= vermogen [ $W$ ]; omtrek [ $m$ ]	

$p$	= druk [Pa]
$q_V$	= volumedebiet [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
$R$	= molaire gasconstante (8314,41 J/(kmol·K))
$R_h$	= hydraulische straal [m]
$r$	= straal [m]
$s_v$	= vleugelslankheid [—]
$v$	= snelheid; $\langle v \rangle$ gemiddelde snelheid [m/s]
$W$	= energie [J]
$x$	= plaats
$\alpha$	= doorstroomcoëfficiënt [—]
$\varepsilon$	= absolute wandruwheid [m]
$\zeta$	= weerstandscoëfficiënt (voor pijpen) [—]
$\eta$	= dynamische viscositeit [Pa·s]
$\lambda$	= weerstandsfactor voor pijpen [—]
$\mu$	= contractiecoëfficiënt; afvoercoëfficiënt [—]
$\nu$	= kinematische viscositeit [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\varrho$ ( $\rho$ )	= dichtheid [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\Phi$	= massastroomdichtheid [ $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ]

### Symbolen warmtetransport

$a$	= $\lambda/(\rho \cdot c_p)$ = temperatuurvereffeningscoëfficiënt [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$C$	= stralingsconstante [ $\text{K}^4 \cdot \text{m}^2/\text{W}$ ]
$c_p$	= soortelijke warmte bij constante druk [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ]
$G$	= warmtegeleiding [ $\text{W}/\text{K}$ ]
$g$	= specifieke warmtegeleiding [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]
$g$	= versnelling van de vrije val [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]
$K$	= warmtedoorgangcoëfficiënt [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]
$L$	= karakteristieke lengte, diameter [m]
$M$	= stralingsemissie [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] warmte-isolatiecoëfficiënt [ $\text{m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$ ]
$M_\lambda$	= spectrale stralingsemissie [ $\text{W}/\text{m}^3$ , $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$ ]
$\dot{Q}$	= warmtestroom [W]
$q$	= warmtestroomdichtheid [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]
$R$	= warmteweerstand [ $\text{K}/\text{W}$ ], ook $R_t, \theta$
$\Delta T$	= karakteristiek temperatuurverschil [K]
$v$	= karakteristieke snelheid [m/s]
$\alpha(\lambda)$	= (spectrale) absorptiefactor [—]
$\alpha$	= warmteoverdrachtscoëfficiënt [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]
$\gamma$	= kubieke uitzettingscoëfficiënt [ $\text{K}^{-1}$ ]
$\varepsilon(\lambda)$	= (spectrale) emissiefactor [—]



- $\lambda$  = golflengte [m]  
 $\lambda$  = warmtegeleidingscoëfficiënt [W/(m·K)]  
 $\rho(\rho)$  = dichtheid (in warme toestand) [kg/m<sup>3</sup>]  
 $\sigma$  = constante van Stefan-Boltzmann [W/(K<sup>4</sup>·m<sup>2</sup>)]  
 $\Phi$  = stralingsflux [W]

### Symbolen stoftransport

- $c$  = molaire concentratie [kmol/m<sup>3</sup>]  
 $D$  = diffusiecoëfficiënt [m<sup>2</sup>/s]  
 $K$  = stofdoorgangscoefficiënt [m/s]  
 $k$  = stofoverdrachtscoëfficiënt [m/s]  
 $q_s$  = stofstroomdichtheid [kmol/(m<sup>2</sup>·s)]  
 $\Phi_s$  = stofstroom [kmol/s]

## 5.1 Kengrootheden

Tabel 5.1 Kengrootheden of ken(ge)tallen bij transportverschijnselen

naam	definitie	fysische betekenis
<i>Fourier</i>	$ Fo = \frac{at}{L^2} = \frac{\lambda t}{\rho c_p L^2} $	$\frac{\text{verstreken tijd}}{\text{indringtijd}}$
<i>Froude</i>	$ Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}} \text{ of } \frac{v^2}{gL} $	$\frac{\text{traagheidskracht}}{\text{zwaartekracht}}$
<i>Grashof</i> <sup>1)</sup>	$ Gr = \frac{L^3 g \gamma \Delta T}{v^2} $ $ = \frac{L^3 g (\rho - \rho_w) \Delta T}{v^2 \rho_w} $	$\frac{\text{kracht t.g.v. dichtheidsversch.}}{\text{visceuze kracht}}$
<i>Mach</i> <sup>3)</sup>	$ Ma = \frac{v}{c} $	$\frac{\text{snelheid t.o.v. fluïdum}}{\text{geluidssnelheid in fluïdum}}$
<i>Nusselt</i>	$ Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} $	$\frac{\text{totaal warmtetransport}}{\text{geleidingstransport}}$

Tabel 5.1 (vervolg)

naam	definitie	fysische betekenis
Prandtl <sup>4)</sup>	$Pr = \frac{v}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$	<u>impulsdiffusie</u> <u>warmtediffusie</u>
Reynolds <sup>5)</sup>	$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}$	<u>traagheidskracht</u> <u>visceuze kracht</u>
Sherwood	$Sh = \frac{\Phi d}{\rho D}$	<u> totaal stoftransport</u> <u> diffusietransport</u>

<sup>1)</sup> Voor lucht van 20 °C is  $Gr \approx 78 \cdot 10^9 L^3 \Delta T$ .

<sup>2)</sup> Index  $w$  voor warme toestand

<sup>3)</sup> Voor lucht van 20 °C is  $c \approx 20,1 \sqrt{T}$  m/s  
 $Ma < 1$ : *subsoon*;  $Ma > 1$ : *supersoon*.

<sup>4)</sup> Voor lucht van 20 °C is  $Pr \approx 0,71$ .

<sup>5)</sup> Voor  $Re \approx 2300$  slaat stroming om van *laminair* naar *turbulent*.

In de formules voor de kengrootheden zijn in het bijzonder:

$L$  = karakteristieke afmeting, zoals lengte, diameter [m]

$v$  = karakteristieke snelheid, zoals relatieve gemiddelde snelheid [m/s]

$t$  = karakteristiek tijdsinterval [s]

$\Delta T$  = karakteristiek temperatuursverschil [K]

## 5.2 Stroming van onsamendrukbare vloeistoffen

### Continuïteitsbetrekking

In een *gesloten* systeem geldt:

– algemeen: *massastroom*  $q_m = \int_A \rho v \, dA = \text{constant}$

– voor  $\rho = \text{constant}$ : *volumestroom*  $q_V = \int_A v \, dA = \text{constant}$

of :  $q_V = \langle v \rangle \cdot A = \text{constant}$

waarin:

$\langle v \rangle$  = gemiddelde stromingsnelheid over doorsnede  $A$

## Druk en energie

Een stromende onsamendrukbare vloeistof ondervindt de volgende drukken:

- *statische druk*  $p$ , uitwendig aangebracht;
- *hydrostatische druk*  $\rho gh$ , in vloeistofelement op hoogte  $h$  ten gevolge van het zwaartekrachtsveld;
- *stuwdruk*  $\frac{1}{2}\rho v^2$  (ook: *snelheidsdruk*, *dynamische druk*) ten gevolge van de stroomsnelheid.

Men noemt  $p_c = p + \rho gh$ : voor hoogte gecorrigeerde druk;

$$p_0 = p_c + \frac{1}{2}\rho v^2: \text{totale druk.}$$

*Druk* is equivalent met *energiedichtheid*  $w$  [ $\text{Pa} \hat{=} \text{J/m}^3$ ].

- $p_c$  = maat voor de *potentiële energie*;
- $\frac{1}{2}\rho v^2$  = maat voor de *kinetische energie*.

## Wet van Bernoulli

Uitgaande van de *massabalans* en de *energiebalans* geldt voor een stationair stromende wrijvingsloze vloeistof:

Langs een stroomlijn (in de richting van de snelheidsvector) is de totale energiedichtheid constant.

of: Totale druk + totaal uitgewisselde energiedichtheid  
= constant

of:  $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 + \Sigma w = \text{constant}$

Formule van Bernoulli in termen van *hoogte*:

$$\frac{p}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g} + h_v = H = \text{constant}$$

In  $\Sigma w$ , resp.  $h_v$  kan men verliezen in buizen en appendages verrekenen.

Algemeen is  $h_v = \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g}$ ; waarin  $\zeta$  = weerstandscoefficiënt.

Voor verliezen: zie par. 5.6 en 5.8.

## 5.3 Formules van Bernoulli voor ideale gassen

Bij *isotherme* toestandsverandering ( $p/\rho = \text{constant}$ ) geldt:

$$\frac{p}{\rho} \ln \rho + gh + \frac{1}{2}v^2 = \text{constant}$$

Bij *isentropische* toestandsverandering ( $p/\rho^\gamma = \text{constant}$ ) geldt:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho} + gh + \frac{1}{2}v^2 = \text{constant}$$

of:  $C_p \cdot T + gh + \frac{1}{2}v^2 = \text{constant}$

## 5.4 Toepassingen wet van Bernoulli

### Uitstroomwet van Torricelli

De snelheid waarmee een vloeistof uit een opening in de wand van een vat stroomt is:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Bij een overdruk  $\Delta p$  op de vloeistof is:

$$v = \sqrt{2\left(gh + \frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

Het volumedebiet  $q_V$  is dan:

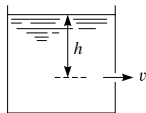
$$q_V = \mu \cdot A \cdot v = \mu A \sqrt{2\left(gh + \frac{\Delta p}{\rho}\right)}$$

$\mu = \text{contractiecoëfficiënt}$ , wordt bepaald door de vorm van de opening en de dikte van de wand:

- cirkelvormige opening:  $\mu \approx 0,66$
- vierkante opening :  $\mu \approx 0,58$

*Uitstroming van een gas door een opening.*

Bij een drukverschil  $\Delta p$  is de snelheid:



Figuur 5.1  
Vat met opening

$$v = \sqrt{2\Delta p/\rho}$$

### Pitotbuis (stuwbuis van Prandtl)

Stroomsnelheid wordt gemeten d.m.v. een drukverschil ( $p_2 - p_1$ )

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v^2 \quad v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$$

### Venturimeter

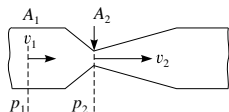
Gebruikt voor meting van de snelheid van een vloeistof in een pijpleiding of als volumedebietmeter.

Gemeten wordt:  $\Delta p = p_1 - p_2$

Dan is:

$$q_V = \frac{A_2}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

waaruit  $v_1 = q_V/A_1$ .



Figuur 5.2 Venturi

### Meetflens

Gebruikt als debietmeter, ook voor gassen. Door meting van  $\Delta p$  t.g.v. een vernauwing wordt het debiet berekend volgens:

$$q_V = \alpha A_0 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

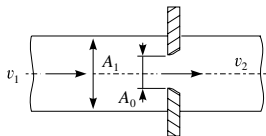
waarin:

$$\alpha = \frac{k\mu}{\sqrt{1 - \mu^2(A_0/A_1)^2}} = \text{doorstroomcoëfficiënt } (0,6 < \alpha < 0,8)$$

$\mu$  = contractiecoëfficiënt ( $\mu < 1$ )

$k$  = correctiefactor

Voor gassen geldt algemeen:  $\alpha_{\text{gas}} \simeq 0,9 \alpha_{\text{vloeistof}}$



Figuur 5.3 Meetflens

## Smoren

*Smoren* is adiabatische ontspanning tussen twee drukken bij constante enthalpie  $H$ . Dit geldt voor ieder fluïdum.

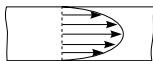
*Kritische stroming*: stroomsnelheid van een gas, die optreedt als het gas uit een reservoir op overdruk ontsnapt.

Het *debit* is afhankelijk van  $\Delta p$ , maar neemt niet meer toe voor  $\Delta p \geq \Delta p_{\text{krit.}}$ . De uitstroomsnelheid is dan  $v_0 = c$  (geluidssnelheid). Voor lucht geldt voor de kritische toestand:  $p_2/p_1 = 0,53$ .

## 5.5 Stroming door cilindrische buizen

### Laminaire stroming

De snelheidsverdeling in de buis is paraboolvormig.



Figuur 5.4 *Laminair stroming*

Voor een laminaire vloeistofstroming in een cilindrische buis met straal  $r$  (diameter  $d$ ) geldt, wanneer over de lengte  $l$  een drukverschil  $\Delta p$  bestaat, de *wet van Hagen-Poiseuille*:

$$q_V = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l} = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128\eta l}$$

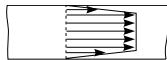
Hieruit volgt voor de gemiddelde snelheid in de buis:

$$\langle v \rangle = \frac{q_V}{\pi r^2} = \frac{r^2 \Delta p}{8\eta l} = \frac{d^2 \Delta p}{32\eta l} = \frac{1}{2} v_{\text{max}}$$

Laminaire stroming kan slechts optreden voor  $Re < Re_{\text{krit}} \approx 2300$ .

### Turbulente stroming

De verdeling van de gemiddelde snelheid in de buis is bijna rechthoekig, zie figuur 5.5. Vlak langs de wand is de stroming meestal laminair, mits de wand glad is.



Figuur 5.5 *Turbulente stroming*

In een gladde buis is de stroming volledig turbulent als  $Re > 10\,000$  à  $12\,000$ . Tussen  $Re_{\text{krit}}$  en  $Re_{\text{turb.}}$  treden overgangsverschijnselen op.

### Wervel(stroming)

Een *wervel* is een roterende stroming met concentrische cirkels als stroomlijnen, waarbij voor iedere stroomlijn de stroomsnelheid  $v$  met de afstand  $r$  tot het middelpunt voldoet aan:

$$\Gamma = 2\pi r \cdot v = \text{wervelsterkte of circulatie}$$

Algemeen geldt voor een gesloten kromme:

$$\Gamma = \oint v_s \cdot ds$$

waarin:  $v_s$  = component van de snelheid in de richting van de raaklijn ter plaatse van een punt van de kromme

### Rotatiestroming

Bij *rotatiestroming* beweegt de vloeistofmassa zich als een vaste cilinder die om zijn as draait.

### Moleculaire of knudsenstroming

Komt voor bij gassen: de wisselwerking tussen de gasmoleculen onderling is verwaarloosbaar.

Voor lucht bij kamertemperatuur treedt *moleculaire stroming* op in een buis met diameter  $d$  als  $pd < 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{m}$ .

Wanneer  $pd > 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{m}$  spreekt men van *visceuze stroming*.

## 5.6 Wrijving in cilindrische buizen

Bij vloeistofstroming in *buizen* treedt t.g.v. wrijving een drukverschil over een lengte  $l$  op:

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (\text{Darcy-Weisbach})$$

Hierbij hoort een wrijvingskracht:

$$F_w = \frac{\pi}{4} d^2 \Delta p = \frac{\pi}{4} d \cdot l \cdot \lambda \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$$

waarin:  $\zeta = \text{weerstandscoefficiënt}$  } (voor cilindrische buizen  
 $\lambda = \frac{d}{l} \zeta = \text{weerstandsfactor}$  } met diameter  $d$ )

$\lambda$  is een functie van  $Re$  (getal van Reynolds) en de relatieve ruwheid  $\varepsilon/d$  van de wand.

Zie ook par. [Fysische gegevens, tabel 1.15.](#)

Laminaire stroming ( $Re < 2300$ ):  $\lambda = \frac{64}{Re}$

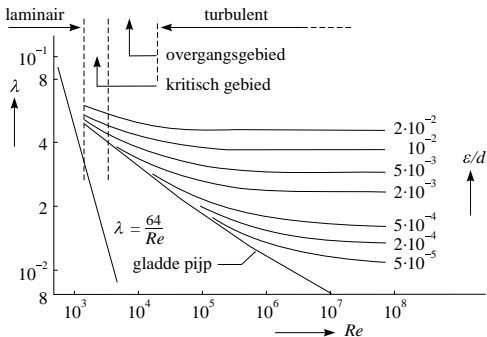
Turbulente stroming:

– gladde wand ( $Re < 65d/\varepsilon$ )

$4000 < Re < 10^5$ :  $\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$  (Blasius)

$10^5 < Re < 10^8$ :  $\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}$  (Nikuradse)

– ruwe wand ( $Re > 1300d/\varepsilon$ ): zie figuur 5.6.



Figuur 5.6 Weerstandsfactor  $\lambda$  voor cilindrische buizen (Moody-diagram of diagram van Colebrook en Nikuradse)



Het drukverlies  $\Delta p$  kan ook in een hoogteverschil worden uitgedrukt:

$$h_v = \lambda \frac{l \langle v \rangle^2}{d \cdot 2g}$$

$$\text{Verhang: } I = \frac{h_v}{l} = \frac{\lambda \langle v \rangle^2}{d \cdot 2g}$$

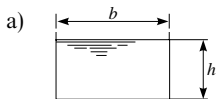
## 5.7 *Stroming door niet-cilindrische buizen*

Voor *stroming door niet-cilindrische buizen* is de volgende reken-grootheid ingevoerd:

$$\text{Hydraulische straal: } R_h = \frac{A_v}{P_v}$$

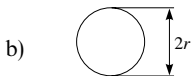
waarin:  $A_v$  = door vloeistof ingenomen doorsnede  
 $P_v$  = door vloeistof bevochtigde buisomtrek

Bijzondere gevallen:



$$R_h = \frac{b \cdot h}{b + 2h}$$

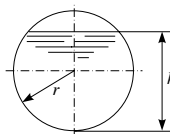
Hydraulisch gunstigste bakprofiel als  $b = 2h$ ; dan is  $R_h = \frac{1}{2}h$ .



Geheel gevuld met vloeistof:  $R_h = \frac{1}{2}r$ .  
 Half gevuld met vloeistof:  $R_h = \frac{1}{2}r$ .

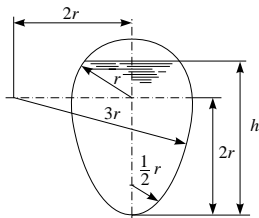
- c) Gedeeltelijk gevulde *cirkelvormige* profielen: zie [tabel 5.2a](#).  
 Hydraulisch gunstigste vulling als  $h = 1,60r$ .
- d) Gedeeltelijk gevulde *eivormige* profielen: zie [tabel 5.2b](#).  
 Hydraulisch gunstigste vulling als  $h = 2,60r$ .

Tabel 5.2a Gedeeltelijk gevulde  
cirkelvormige profielen



vulhoogte $h$	natte omtrek $P_v$	natte doorsnede $A_v$	hydraulische straal $R_h$
2,00 $r$	6,283 $r$	3,142 $r^2$	0,500 $r$
1,95 $r$	5,648 $r$	3,121 $r^2$	0,553 $r$
1,90 $r$	5,381 $r$	3,083 $r^2$	0,573 $r$
1,85 $r$	5,174 $r$	3,035 $r^2$	0,587 $r$
1,80 $r$	4,996 $r$	2,978 $r^2$	0,596 $r$
1,75 $r$	4,838 $r$	2,915 $r^2$	0,603 $r$
1,70 $r$	4,692 $r$	2,846 $r^2$	0,607 $r$
1,60 $r$	4,429 $r$	2,694 $r^2$	0,608 $r$
1,50 $r$	4,189 $r$	2,527 $r^2$	0,603 $r$
1,40 $r$	3,965 $r$	2,349 $r^2$	0,592 $r$
1,30 $r$	3,751 $r$	2,162 $r^2$	0,576 $r$
1,20 $r$	3,544 $r$	1,968 $r^2$	0,555 $r$
1,10 $r$	3,342 $r$	1,770 $r^2$	0,530 $r$
1,00 $r$	3,142 $r$	1,571 $r^2$	0,500 $r$
0,90 $r$	2,941 $r$	1,371 $r^2$	0,466 $r$
0,80 $r$	2,739 $r$	1,173 $r^2$	0,428 $r$
0,70 $r$	2,532 $r$	0,980 $r^2$	0,387 $r$
0,60 $r$	2,319 $r$	0,793 $r^2$	0,342 $r$
0,50 $r$	2,094 $r$	0,614 $r^2$	0,293 $r$
0,40 $r$	1,855 $r$	0,447 $r^2$	0,241 $r$
0,30 $r$	1,591 $r$	0,295 $r^2$	0,1857 $r$
0,25 $r$	1,445 $r$	0,227 $r^2$	0,1568 $r$
0,20 $r$	1,287 $r$	0,1635 $r^2$	0,1270 $r$
0,15 $r$	1,110 $r$	0,1070 $r^2$	0,0965 $r$
0,10 $r$	0,902 $r$	0,0587 $r^2$	0,0651 $r$
0,05 $r$	0,635 $r$	0,0209 $r^2$	0,0329 $r$

Tabel 5.2b Gedeeltelijk gevulde  
eivormige profielen



vulhoogte $h$	natte omtrek $P_v$	natte doorsnede $A_v$	hydraulische straal $R_h$
3,00 $r$	7,930 $r$	4,594 $r^2$	0,579 $r$
2,95 $r$	7,295 $r$	4,573 $r^2$	0,627 $r$
2,90 $r$	7,028 $r$	4,535 $r^2$	0,645 $r$
2,85 $r$	6,820 $r$	4,487 $r^2$	0,658 $r$
2,80 $r$	6,643 $r$	4,431 $r^2$	0,667 $r$
2,75 $r$	6,484 $r$	4,367 $r^2$	0,674 $r$
2,70 $r$	6,339 $r$	4,299 $r^2$	0,678 $r$
2,60 $r$	6,075 $r$	4,147 $r^2$	0,683 $r$
2,50 $r$	5,835 $r$	3,980 $r^2$	0,682 $r$
2,40 $r$	5,611 $r$	3,801 $r^2$	0,677 $r$
2,30 $r$	5,398 $r$	3,614 $r^2$	0,670 $r$
2,20 $r$	5,191 $r$	3,421 $r^2$	0,659 $r$
2,10 $r$	4,989 $r$	3,223 $r^2$	0,646 $r$
2,00 $r$	4,788 $r$	3,023 $r^2$	0,631 $r$
1,70 $r$	4,187 $r$	2,426 $r^2$	0,579 $r$
1,40 $r$	3,580 $r$	1,847 $r^2$	0,516 $r$
1,10 $r$	2,960 $r$	1,305 $r^2$	0,441 $r$
0,80 $r$	2,319 $r$	0,820 $r^2$	0,354 $r$
0,50 $r$	1,647 $r$	0,4138 $r^2$	0,251 $r$
0,35 $r$	1,294 $r$	0,2479 $r^2$	0,1916 $r$
0,20 $r$	0,927 $r$	0,118 $r^2$	0,1206 $r$
0,15 $r$	0,795 $r$	0,0739 $r^2$	0,0929 $r$
0,10 $r$	0,644 $r$	0,04088 $r^2$	0,0635 $r$
0,05 $r$	0,451 $r$	0,01468 $r^2$	0,0326 $r$
0,025 $r$	0,318 $r$	0,00523 $r^2$	0,01647 $r$

## 5.8 Verliezen in openingen en appendages

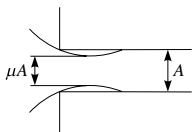
Verliezen worden d.m.v. de weerstandscoefficiënt of verliesfactor  $\zeta$  berekend, zie ook par. 5.2.

### Intreeverliezen ( $\zeta_i$ )

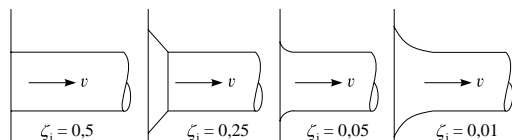
$\zeta_i$  wordt bepaald door de afronding. Er treedt bij binnenstromen *contractie* op (zie figuur 5.7).

De *contractie-coëfficiënt* is  $\mu = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta_i}}$ ,

$$\text{dus } \zeta_i = \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right)^2$$



Figuur 5.7 Contractie

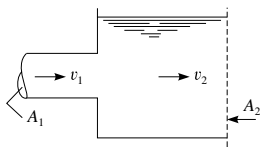


Figuur 5.8 Intreeverliezen

### Uittreeverliezen ( $\zeta_u$ )

$$\zeta_u = \left( 1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \text{ betrokken op } v_1$$

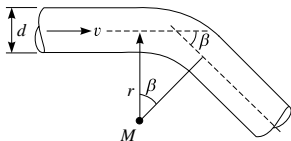
$$h_v = \zeta_u \frac{v_1^2}{2g}$$



Figuur 5.9 Uittreeverliezen

### Bochtverliezen ( $\zeta_b$ )

$\zeta_b$  is een functie van de bocht-hoek  $\beta$  en de waarde  $r/d$ , zie tabel 5.3 (volgens Hütte).



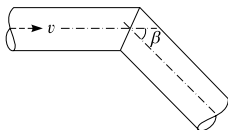
Figuur 5.10 Bochtverliezen

Tabel 5.3  $\zeta_b$ -waarden voor bochten bij verschillende  $\beta$ -waarden

$\beta$	15°	22,5°	30°	45°	60°	90°
$d$	0,03	0,045	0,085	0,14	0,19	0,21
$2d$	0,03	0,045	0,060	0,09	0,12	0,14
$4d$	0,03	0,045	0,055	0,08	0,10	0,11
$6d$	0,03	0,045	0,050	0,075	0,09	0,09
$10d$	0,03	0,045	0,045	0,07	0,07	0,11

### **Knikverliezen ( $\zeta_k$ )**

Tabel 5.4 geeft waarden van  $\zeta_k$  afhankelijk van de waarde van  $\beta$  (volgens Hütte).



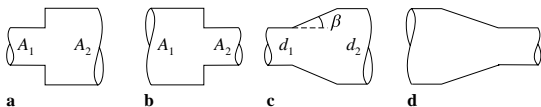
Figuur 5.11 Knikverliezen

Tabel 5.4  $\zeta_k$ -waarden voor knikken bij verschillende  $\beta$ -waarden

	10°	15°	22,5°	30°	45°	60°	90°
glad	0,034	0,042	0,066	0,130	0,236	0,471	1,129
ruw	0,044	0,062	0,154	0,165	0,320	0,684	1,265

### **Verliezen t.g.v. vernauwing en verwijding ( $\zeta_v$ )**

De verliezen worden gegeven voor de uitgangssnelheid  $v_2$ .

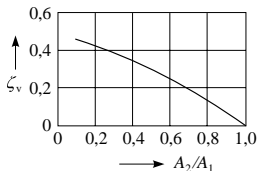


$$\zeta_v = \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$

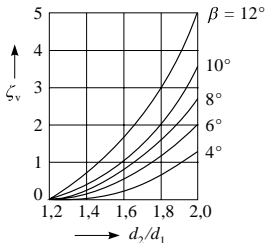
(zie figuur 5.13) (zie figuur 5.14)

$\zeta_v = 0,05$   
voor niet te grote hoeken

Figuur 5.12  $\zeta_v$ -waarden (volgens Dubbel)



Figuur 5.13  $\zeta_v$ -waarden voor geval **b** van [figuur 5.12](#)



Figuur 5.14  $\zeta_v$ -waarden voor geval **c** van [figuur 5.12](#)

## 5.9 Omstroming van vaste lichamen

Bevindt een vast lichaam met een effectief oppervlak  $A$  zich in een stromende vloeistof, dan ondervindt dit lichaam een *drukweerstandskracht*:

$$F_p = c_p \cdot A \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \quad (\text{wet van Newton})$$

waarin:  $c_p$  = drukweerstandscoefficiënt

T.g.v. de vloeistofviscositeit is er een *wrijvingskracht*:

$$F_f = c_f \cdot A \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$$

waarin:  $c_f$  = wrijvingsweerstandscoefficiënt

De totale *weerstandskracht*  $F_w$  wordt nu:

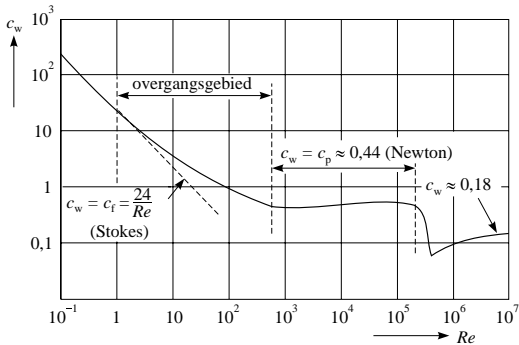
$$F_w = c_w \cdot A \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$$

waarin:  $c_w$  = weerstandscoefficiënt

Bij een *kruipende beweging* is er alleen de wrijvingskracht. Voor een bol geldt dan:

$$F_f = 6\pi\eta r v \quad (\text{wet van Stokes})$$

waarin:  $r$  = straal van de bol;  
 $v$  = valsnelheid



Figuur 5.15  $c_w$  als functie van  $Re$  voor een bol

De **weerstandscoefficiënt**  $c_w$  is een functie van het getal van Reynolds en de vorm van het lichaam (zie figuur 5.15).

### Weerstandskracht en draagkracht bij vliegtuigen

Weerstandskracht :  $F_w = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A_v$

Draagkracht :  $F_L = c_L \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A_v$

Voor evenwicht geldt:  $G_v = F_L$  (= vliegtuiggewicht)

De coëfficiënten  $c_w$  en  $c_L$  hangen af van de hoek die het vleugelprofiel maakt met de vliegrichting.

Bij benadering geldt ook:  $c_w = \frac{c_L^2}{\pi s_v}$

waarin:  $s_v$  = vleugelslankheid

## 5.10 Stroming door kanalen en goten

### Weerstandsfactor in open leidingen

Laminaire stroming:

$$b/h = 1 : \lambda = 57/Re$$

$$b/h = 4 : \lambda = 74/Re$$

$$b/h > 10: \lambda = 96/Re$$

waarin:  $Re = \frac{4vR_h}{\nu}$  ( $R_h$  = hydraulische straal)

*Turbulente stroming*

Hydraulisch glad:  $\lambda_g^{-1/2} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda_g}) - 1$

Hydraulisch ruw:  $\lambda_r^{-1/2} = C_r - 2 \log(\epsilon/d)$

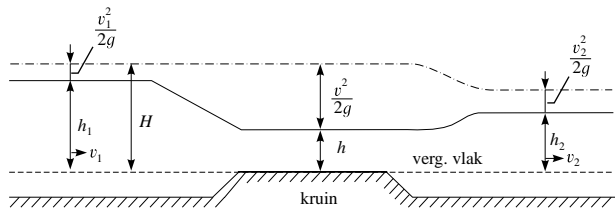
Waarin (volgens *Reinius* en *Keulegan*):

– voor rechthoekige leiding  $b/h = 4$ :  $C_r = 1,02$

$b/h = 2$ :  $C_r = 1,04$

– voor trapeziumvormige leiding :  $C_r = 1,00$

## Overlaten



$b$  = kruinbreedte (loodrecht op vlak van tekening)

$h_1$  = waterdiepte vóór de kruin } gemeten vanaf de kruin

$h_2$  = waterdiepte na de kruin

$h$  = waterdiepte boven de kruin

$H$  = totale hoogte

*Figuur 5.16 Overlaat (met definities)*

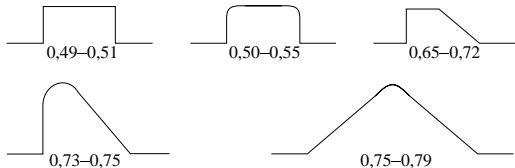
*Lange overlaat*: stroomlijnen lopen boven de kruin horizontaal.

*Korte overlaat*: verticale versnelling boven de kruin.

*Volkomen werkende overlaat*: debiet is onafhankelijk van de benedenwaterstand.

$$h < \frac{2}{3}H \quad q_{V\text{volk}} = \frac{2}{3}\mu b \left( h + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{2g}$$





Figuur 5.17 Afvoercoëfficiënt  $\mu = f(\text{kruinvorm})$

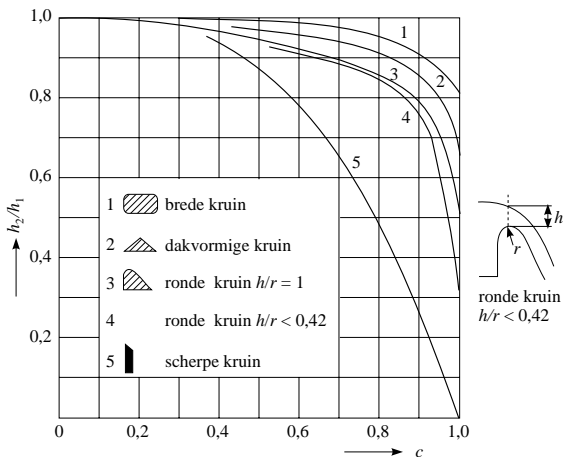
Onvolkomen werkende overlaat: debiet is afhankelijk van de benedenwaterstand.

$$h \geq \frac{2}{3}H \quad q_{V\text{onv}} = cq_{V\text{volk}}$$

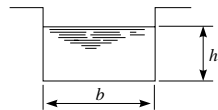
waarin:

$\mu$  = afvoercoëfficiënt = functie van de kruinvorm  
(zie figuur 5.17)

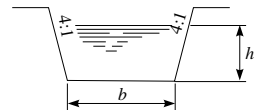
$c$  = evenredigheidsconstante = functie van de verhouding  $h_2/h_1$  (zie figuur 5.18)



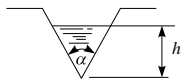
Figuur 5.18 Grafiek van Schmidt:  $c = f(h_2/h_1)$



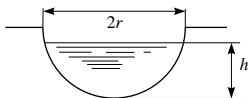
$$q_v = 1,86 b h^{3/2}$$



$$q_v = 1,83 h^{3/2} (b + 0,2 h)$$



$$q_v = 1,465 h^{5/2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$



$$q_v = 3,66 h^{3/2} (r - 0,3 h)$$

*Figuur 5.19 Meetoverlaten*

### **Meetoverlaten (met scherpe kruin)**

*Meetoverlaten* worden gebruikt bij debietmetingen in kanalen. *Figuur 5.19* geeft voor vier verschillende vormen de formule voor  $q_v$ . Hierin is:

$b$  = kruinbreedte (loodrecht op vlak van tekening)

$h$  = ongestoorde waterhoogte boven de kruin

## *5.11 Modelregels*

*Modelregels* maken het mogelijk conclusies te trekken uit op schaal gebouwde modellen. In de stromingsleer moeten prototype en model dynamisch gelijkvormig zijn. De toepassing bepaalt de te hanteren modelregel:

- *Modelregel van Reynolds*:  $Re = \text{constant}$  voor alle stromingsvelden, die beheerst worden door traagheids- en wrijvingskrachten. Toepassing: stromingsweerstand in buizen.
- *Modelregel van Froude*:  $Fr = \text{constant}$  voor alle stromingsvelden, die beheerst worden door traagheidskrachten en zwaartekracht. Toepassing: scheepsbouw, stroming door open leidingen.
- *Modelregel van Mach*:  $Ma = \text{constant}$  als er sprake is van beweging door een samendrukbaar medium. Toepassing: vliegtuigbouw.

## 5.12 Stationair warmtetransport door geleiding

Algemeen:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot dT/dx$$

$$q = -\lambda \cdot dT/dx$$

$$\text{of: } \dot{Q} = g \cdot A \cdot \Delta T = G \cdot \Delta T = \frac{1}{R} \cdot \Delta T$$

waarin o.a.:

$\lambda$  = warmtegeleidingscoëfficiënt [W/(m·K)]

Voor  $\lambda$ -waarden zie par. [Fysische gegevens](#), tabel 1.3(6), 1.4 t/m 1.7(5).

$G$  = warmtegeleiding [W/K]

$g$  = specifieke warmtegeleiding [W/(m<sup>2</sup>·K)]

$R = 1/G$  = warmteweerstand [K/W]

} van geleidend  
materiaal,  
bijv. glas,  
steen

Vlakke wand met dikte  $d$  [m]:

$$g = \lambda/d$$

$$R = d/(\lambda \cdot A)$$

Samengestelde vlakke wand

$$\frac{1}{g} = \sum_i \frac{d_i}{\lambda_i} \quad R = \frac{1}{A} \sum_i \frac{d_i}{\lambda_i}$$

Cilindrische wand (buis):

$$g = \frac{2\lambda}{D_u \ln(D_u/D_i)} \quad R = \frac{\ln(D_u/D_i)}{2\pi\lambda l}$$

$$A = \pi D_u \cdot l$$

waarin:  $D_u$  = buitendiameter [m]  
 $D_i$  = binnendiameter [m]  
 $l$  = lengte [m]

Sferische wand (holle kogel):

$$G = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_u}}$$

### 5.13 Stationair warmtetransport door convectie

Algemeen:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T \quad (\text{afkoelingswet van Newton})$$

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{L}$$

$$\Delta T = T_w - T_m$$

waarin:

$A$  = aanrakingsoppervlak tussen vast lichaam en langstromend medium [ $\text{m}^2$ ]

$T_m$  = gemiddelde temperatuur stromend medium [K]

$T_w$  = oppervlak(wand-)temperatuur vast lichaam [K]

$\lambda$  = warmtegeleidingscoëfficiënt stromend medium [ $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ]

Enige richtwaarden voor  $\alpha$  (zie ook [par. Fysische gegevens, tabel 1.13](#)):

$\alpha$	10	20	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
medium	←	gas	→	←	—	vloeistof	→	←	condensatie	→

*Opmerking.* Onderstaande formules voor de gemiddelde waarden van  $Nu$  en  $\alpha$  ( $\langle Nu \rangle$  resp.  $\langle \alpha \rangle$ ), zijn veelal gebaseerd op experimenten en kunnen afwijken van elders gegeven formules. Voor zover mogelijk wordt daarom de bron vermeld.

**Vrije convectie langs (korte) verticale plaat**  
(éénzijdig, hoogte  $H$ )

Laminaire stroming ( $10^4 < Gr \cdot Pr < 10^8$ )<sup>1)</sup>:

$$\langle Nu \rangle = 0,55 (Gr \cdot Pr)^{1/4} \quad (McAdams)$$

(voor gasen en vloeistoffen)

waarin:  $Gr = \frac{H^3 g \cdot (\rho - \rho_w)}{v^2 \rho_w}$

*Opmerking.* De formule geldt ook voor een horizontale cilindervormige buis, stroming langs buitenzijde,  $H$  vervangen door  $D_u$ .

Voor  $\langle \alpha \rangle$  volgt hieruit:

$$\langle \alpha \rangle = 0,55 \lambda \left( \frac{g \cdot \gamma}{a \cdot v} \right)^{1/4} \cdot \left( \frac{\Delta T}{H} \right)^{1/4}$$

$\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $a$  en  $v$  gelden voor langsstromend medium bij de omgevings-temperatuur.

Voor lucht van 20 °C, atmosferische druk is:

$$\langle \alpha \rangle = 1,35 \left( \frac{\Delta T}{H} \right)^{1/4}$$

Turbulente stroming ( $Gr \cdot Pr > 10^8$ ):

$$\langle Nu \rangle = 0,13 (Gr \cdot Pr)^{1/3} \quad (McAdams)$$

$\alpha$  is onafhankelijk van  $H$

Voor  $10^9 < Gr \cdot Pr < 10^{10}$  is:

$$\langle Nu \rangle = 0,02 (Gr \cdot Pr)^{0,4} \quad (McAdams)$$

<sup>1)</sup> Voor  $Gr \cdot Pr$  wordt ook wel  $Ra$  = kengroottheid van Rayleigh genoteerd. Voor enige Prandtl-getallen zie par. [Fysische gegevens, tabel 1.14](#).

### **Vrije convectie langs horizontale plaat**

(Warmte-uitwisseling aan boven- of onderzijde; kleinste waarden volgens McAdams)

*Laminaire stroming* ( $10^3 < Gr \cdot Pr < 10^8$ ):

- aan bovenzijde:  $\langle Nu \rangle = A(Gr \cdot Pr)^{1/4}$ :  $A = 0,54 \dots 0,71$
- aan onderzijde:  $\langle Nu \rangle = B(Gr \cdot Pr)^{1/4}$ :  $B = 0,27 \dots 0,35$

*Turbulente stroming* ( $Gr \cdot Pr > 10^8$ ):

- aan bovenzijde:  $\langle Nu \rangle = C(Gr \cdot Pr)^{1/3}$ :  $C = 0,14 \dots 0,17$
- aan onderzijde:  $\langle Nu \rangle = D(Gr \cdot Pr)^{1/3}$ :  $D \approx 0,08$

Voor de karakteristieke lengte  $L$  in  $Gr$  neme men het gemiddelde van lengte en breedte van de plaat.

### **Vrije convectie langs twee vlakke parallelle horizontale platen**

(onderste plaat warm, bovenste koud met gas of vloeistof ertussen; karakteristieke lengte  $L$  = afstand tussen de platen)

$$\begin{array}{ll} Gr \cdot Pr < 10^3 & \vdots \quad Nu = 1 \\ 10^4 < Gr \cdot Pr < 10^7 & \vdots \quad \langle Nu \rangle = 0,15(Gr \cdot Pr)^{1/4} \\ 10^7 < Gr \cdot Pr & \vdots \quad \langle Nu \rangle = 0,17(Gr \cdot Pr)^{1/3} \end{array}$$

### **Vrije convectie langs verticale cilinder**

(warmteoverdracht aan buitenzijde)

*Laminaire stroming* ( $1600 < Re < 4600$ ):

$$\langle Nu \rangle = 0,255 Gr^{0,25} \cdot Re^{0,07} \cdot Pr^{0,37} \quad (\text{Wayzinger en Johnson})$$

### **Gedwongen convectie langs vlak glad oppervlak**

*Laminaire stroming* ( $Re < 3 \cdot 10^5$ ):

$$\langle Nu \rangle = 0,664 Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (\text{Eckert})$$

Voor lucht van  $20^\circ\text{C}$ , atmosferische druk is:

$$\langle Nu \rangle = 0,593 Re^{1/2}$$

*Turbulente stroming* ( $Re > 3 \cdot 10^5$ ):

$$\langle Nu \rangle = 0,027 Re^{0,8} \cdot Pr^{1/3} \quad (\text{Hütte})$$

Voor lucht van  $20^\circ\text{C}$ , atmosferische druk is:

$$\langle Nu \rangle = 0,024 Re^{0,8}$$

Afhankelijkheid van  $\alpha$  van lichtsnelheid  $v$  langs oppervlak volgens *Jürgess*:

$$v \leq 5 \text{ m/s} \quad \alpha = 5,6 + 4,0 v$$

$$v > 5 \text{ m/s} \quad \alpha = 7,12 \cdot v^{0,78}$$

**Gedwongen convectie in gladde, rechte, cilindervormige buis**  
*Laminaire stroming* (nog niet ingesteld), geldig voor vloeistoffen en gassen:

$$\langle Nu \rangle = F \left( Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left( \frac{\eta_i}{\eta_w} \right)^{0,14}$$

waarin:

$d$  = diameter buis

$l$  = lengte buis

index  $i$  : voor niet verwarmde vloeistof

index  $w$ : voor vloeistof aan buiswand

$$F = 1,62 \quad \text{voor } T_{\text{wand}} = \text{constant} \left. \vphantom{F} \right\} \text{over gehele buislengte}$$
$$= 1,93 \quad \text{voor } \dot{Q} = \text{constant.}$$

*Ingestelde Poiseuille-stroom*:

$$\langle Nu \rangle = 3,66 \quad \text{voor } T_{\text{wand}} = \text{constant}$$

$$\langle Nu \rangle = 4,36 \quad \text{voor } \dot{Q} = \text{constant}$$

Voor propstroming geldt:

$$\langle Nu \rangle = 5,78$$

*Turbulente stroming* ( $Re > 10^4$ )

$$\langle Nu \rangle = 0,039 Re^{0,75} \cdot Pr^{0,56} \quad \text{voor: } 0,6 < Pr < 1,7$$

$$\langle Nu \rangle = 0,024 Re^{0,8} \cdot Pr^{0,39} \quad \text{voor: } 1,7 < Pr < 14$$

$$\langle Nu \rangle = 0,022 Re^{0,86} \cdot Pr^{0,23} \quad \text{voor: } 14 < Pr < 300$$

Voor lucht van  $20^\circ\text{C}$ , atmosferische druk is:

$$\langle \alpha \rangle = 3,66 \cdot v^{0,8} \cdot d^{-0,2}$$

Voor water in buis met  $15 < d < 100$  mm:

$$\langle \alpha \rangle = 3373 v^{0,85} [1 + 0,014(T - 273)]$$

## 5.14 Stationair warmtetransport door geleiding en convectie

Wanneer een scheidingswand aan beide zijden wordt begrensd door een fluidum, waar warmtetransport plaatsvindt door convectie, spreekt men van *warmtedoorgang*. Algemeen geldt:

$$\dot{Q} = K \cdot A \cdot \Delta T = \frac{1}{M} \cdot A \cdot \Delta T$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{g} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$$

waarin:

$K$  = warmtedoorgangscoëfficiënt [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]

$M = \frac{1}{K} =$  warmte-isolatiecoëfficiënt [ $\text{K} \cdot \text{m}^2/\text{W}$ ]

$g = \lambda/d =$  specifieke warmtegeleiding [ $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]

$$\Delta T = \langle T_1 \rangle - \langle T_2 \rangle \quad [\text{K}]$$

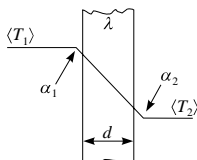
Zie ook par. 5.12 en 5.13.

**Vlakke wand** met dikte  $d$  (figuur 5.20):

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

**Cilindrische buis:**

$$\frac{1}{K} = \frac{D_u}{D_i} \cdot \frac{1}{\alpha_i} + \frac{D_u \ln(D_u/D_i)}{2\lambda} + \frac{1}{\alpha_u} \quad A = \pi \cdot D_u \cdot l$$



Figuur 5.20  
Warmtedoorgang



## 5.15 Stationair warmtetransport door straling

Het uitgestraald vermogen per  $\text{m}^2$  oppervlak van een zwart lichaam met temperatuur  $T$  over de halve ruimte ( $\Omega = 2\pi$  sr) in het golflengtegebied tussen  $\lambda$  en  $d\lambda$  is:

$$M_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \quad (\text{Wet van Planck})$$

Voor  $c_1$  en  $c_2$  zie tabel 1.1

Voor kleine  $\lambda T$ :  $M_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T}$  (Wien)

Voor grote  $\lambda T$ :  $M_\lambda = c_0 k \lambda^{-4} \cdot T$  (Rayleigh)

waarin:  $c_0 =$  lichtsnelheid;  $k =$  constante van Boltzmann

Verschuivingswet van Wien:

$$M_{\lambda_{\max}} \approx 4\pi \cdot 10^{-6} T^5 \text{ voor } \lambda T \approx 3000 \text{ K} \cdot \mu\text{m}$$

Stralingswet van Stefan-Boltzmann (voor zwarte straler):

$$M = \int_0^\infty M_\lambda \cdot d\lambda = \sigma T^4$$

waarin:  $\sigma \approx 56,7 \times 10^{-9} \text{ W}/(\text{K}^4 \cdot \text{m}^2)$   
(const. van Stefan-Boltzmann)

Wet van Kirchhoff voor niet-zwart lichaam:

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{M_\lambda}{M_{\lambda_{\text{zwart}}}} = \alpha(\lambda)$$

Voor een grijs lichaam is:  $\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda) = \text{constant} (< 1)$ .

Een grijs lichaam met oppervlak  $A_1$ , emissiefactor  $\varepsilon_1$ , temperatuur  $T_1$  straalt een vermogen uit gelijk aan:

$$\Phi = \dot{Q} = A_1 \varepsilon_1 \sigma T_1^4$$

Wordt dit lichaam geheel omsloten door een oppervlak ( $A_2, \varepsilon_2, T_2$ ), waarbij  $A_1$  en  $A_2$  elkaar geheel zien, dan is:

$$\Phi_1 = \dot{Q}_1 = C A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{waarin: } \frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_1 \sigma} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2 \sigma} - \frac{1}{\sigma} \right)$$

Voor  $A_2 \rightarrow \infty$  (oneindige ruimte) wordt  $C = \varepsilon_1 \sigma$ :

$$\Phi_1 = \varepsilon_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) \approx 4\varepsilon_1 \sigma A_1 T_m^3 (T_1 - T_2)$$

$$\text{of } q_1 \approx 4\varepsilon_1 \sigma T_m^3 \Delta T$$

$$\text{als } T_1 - T_2 = \Delta T \ll T_1 \text{ en } T_m = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$$

## 5.16 Niet-stationaire warmtegeleiding

### Warmtepenetratie in eenzijdig oneindig uitgestrekt medium

Aanvankelijke temperatuur  $T_0$ . Op tijd  $t = 0$  wordt aan de wand  $T = T_1$  opgedrongen.

De warmtebalans volgt dan uit de één-dimensionale vorm van de differentiaalvergelijking van *Fourier*:

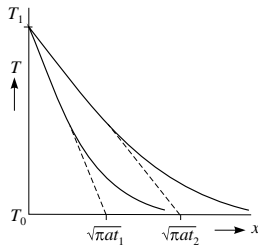
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

De warmtestroomdichtheid door de wand is op tijd  $t$ :

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\pi a t}}$$

$$= (T_1 - T_0) \sqrt{\frac{\lambda \rho c_p}{\pi t}}$$

waarin:  $x = \sqrt{\pi a t} = \text{indringdiepte}$



Figuur 5.21  
Warmtepenetratie

Hierbij wordt het *kengetal van Fourier* gebruikt:  $Fo = \frac{at}{D^2}$

waarin:

$D$  = karakteristieke afmeting, bijv. afstand tot de wand, of diameter van een bol

$Fo$  = verhouding van de procestijd  $t$  en de tijd  $D^2/a$ , die de warmtegeleiding nodig heeft om effectief werkzaam te zijn

## Doorwarming vast lichaam

Indringdiepte  $>$  afmetingen van het lichaam.

De temperatuur in het lichaam zal verlopen als in figuur 5.22.

De gemiddelde temperatuur  $\langle T \rangle$  en de middentemperatuur  $T_m$  kunnen grafisch worden bepaald met [figuur 5.23](#) en [5.24](#)

$$\frac{T_1 - \langle T \rangle}{T_1 - T_0} = \exp\left(-\frac{\alpha A t}{\rho c_p V}\right) \\ = f_1(Fo)$$

en:

$$\frac{T_1 - T_m}{T_1 - T_0} = f_2(Fo)$$

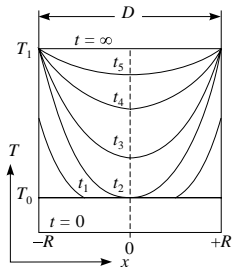
waarin:

$A$  = oppervlakte lichaam

$V$  = volume lichaam

Er geldt:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{R} \int_0^R T dx$$



*Figuur 5.22 Opwarming van een lichaam door niet-stationaire geleiding:*

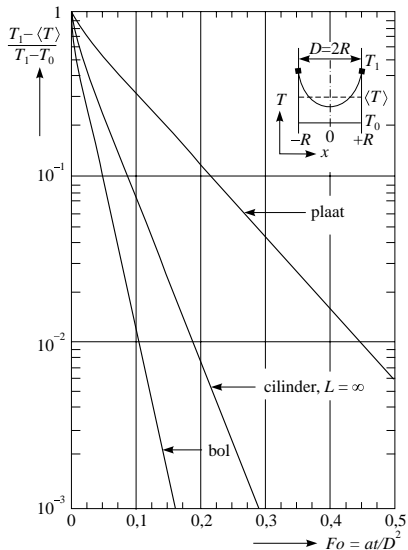
$0 < t < t_2$  'penetratietheorie';

$t_3 < t < \infty$  'constante  $h$ '

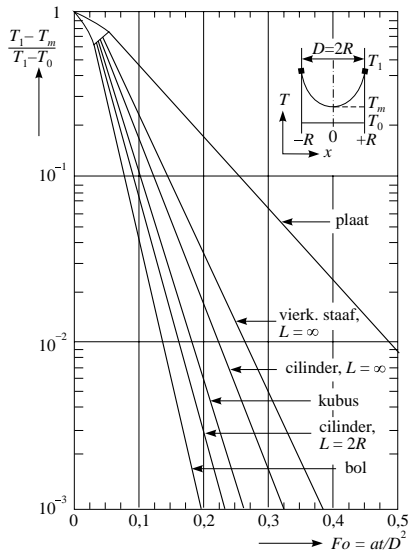
Als  $\lambda$  (lichaam)  $\gg \lambda$  (omgeving) zal  $T$  (lichaam) overal even groot zijn en de opwarm- of afkoelsnelheid onafhankelijk van  $\lambda$  zijn. Als  $\lambda$  niet verwaarloosd mag worden, moet in de vergelijking voor  $\langle T \rangle$   $\alpha'$  i.p.v.  $\alpha$  genomen worden:

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha_{uitw}} + \frac{1}{\alpha_{inw}}$$

$\alpha_{uitw}$  behoort bij de omgeving



Figuur 5.23 Verwarming of afkoeling van een lichaam door warmtegeleiding; gemiddelde temperatuur  $\langle T \rangle$  als functie van de tijd



Figuur 5.24 Verwarming of afkoeling van een lichaam door warmtegeleiding; temperatuur in het midden  $T_m$  als functie van de tijd

$$\alpha_{\text{inw}} = \frac{\lambda C}{D} \text{ behoort bij het lichaam}$$

C hangt af van de vorm van het lichaam:

- vlakke plaat :  $C = 4,93$
- bol :  $C = 6,6$
- slanke cilinder :  $C = 5,8$

## 5.17 Stoftransport

Tabel 5.5 Analogie stoftransport/warmtetransport

stoftransport	warmtetransport
stofstroom $\Phi_s$ [kmol/s]	warmtestroom $\dot{Q}$ [W]
stofstroomdichtheid $q_s$ [kmol/(m <sup>2</sup> ·s)]	warmtestroomdichtheid $q$ [W/m <sup>2</sup> ]
molaire concentratie $c$ [kmol/m <sup>3</sup> ]	temperatuur $T$ [K]
diffusiecoëfficiënt $D$ [m <sup>2</sup> /s]	warmtegeleidingscoëff. $\lambda$ [W/(m·K)]
stofoverdrachtscoëff. $k$ [m/s]	warmte-overdrachtscoëff. $\alpha$ [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
stofdoorgangsscoëff. $K$ [m/s]	warmte-doorgangsscoëff. $K$ [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$q_s = -D \frac{dc}{dx}$	$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$
$q_s = k(c_0 - \langle c \rangle)$ (figuur 5.25)	$q = \alpha \Delta T$

**Stofdiffusie** treedt op als er een concentratiegradiënt in de stof aanwezig is.

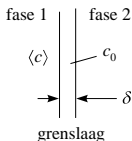
**Stofoverdracht** treedt op als er sprake is van stoftransport tussen twee fasen, zie figuur 5.25.

Bij stofoverdracht speelt de *kengrootheid van Sherwood* een rol:

$$Sh = \frac{k\delta}{D} = \frac{\Phi\delta}{\rho D}$$

waarin:  $\Phi$  = massastroomdichtheid  
 $\delta$  = grenslaagdikte

$Sh$  is analoog aan  $Nu$ .



Figuur 5.25 Stofoverdracht

# 6 Trillingen en geluid

## Symbolen

$A$	= oppervlakte [ $\text{m}^2$ ]
$A_s$	= absorberend vermogen [ $S = \text{sabine} \hat{=} 1 \text{ m}^2 \text{ open raam}$ ]
$a$	= versnelling [ $\text{m/s}^2$ ], absorptiecoëfficiënt [ $-$ ]
$B$	= lawaaibelasting [ $\text{Ke}$ ]
$c$	= voortplantingssnelheid van een golfbeweging = geluidssnelheid [ $\text{m/s}$ ]; compliantie [ $\text{m/N}$ ]
$c_g$	= groepssnelheid [ $\text{m/s}$ ]
$c_p, c_v$	= soortelijke warmte bij constante druk, resp. volume [ $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ]
$E$	= elasticiteitsmodulus [ $\text{N/m}^2$ ] = [ $\text{Pa}$ ]; geluidsenergiedichtheid [ $\text{J/m}^3$ ]
$F$	= kracht; veerkracht [ $\text{N}$ ]
$f$	= frequentie [ $\text{s}^{-1}$ ]
$g$	= versnelling van de vrije val [ $\text{m/s}^2$ ]
$I$	= geluidsintensiteit [ $\text{W/m}^2$ ]
$i$	= geluidsisolatie [ $\text{dB}$ ]
$K$	= compressiemodulus [ $\text{Pa}$ ]
$k$	= cirkelrepetentie [ $\text{m}^{-1}$ ]; veerstijfheid [ $\text{N/m}$ ]
$L_I$	= (geluids)intensiteitsniveau [ $\text{dB}$ ]
$L_N$	= luidheidniveau [foon]
$L_p$	= (geluids)drukniveau [ $\text{dB}$ ]
$l$	= lengte [ $\text{m}$ ]
$m$	= massa [ $\text{kg}$ ]
$P$	= (akoestisch) vermogen [ $\text{W}$ ]
$p$	= momentele geluidsdruk [ $\text{Pa}$ ]
$p_s$	= statische druk [ $\text{Pa}$ ]
$R_a$	= akoestische golfweerstand [ $\text{N} \cdot \text{s/m}^3$ ]
$S$	= luidheid [soon]
$T$	= periodetijd; trillingstijd [ $\text{s}$ ]
$t$	= tijd [ $\text{s}$ ]
$u$	= uitwijking van trillend punt [ $\text{m}$ ]
$U$	= amplitude van de uitwijking [ $\text{m}$ ]
$v$	= snelheid; momentele deeltjessnelheid [ $\text{m/s}$ ]
$x$	= afstand van trillend punt tot de bron [ $\text{m}$ ]
$Z_a$	= akoestische impedantie [ $\text{Pa} \cdot \text{s/m}^3$ ]
$Z_s$	= specifieke akoestische impedantie [ $\text{Pa} \cdot \text{s/m}$ ]

$\gamma$	= verhouding $c_p/c_V$
$\delta$	= dempingscoëfficiënt; decrescentie [ $s^{-1}$ ]
$\lambda$	= golflengte [m]
$\rho$	= dichtheid [ $kg/m^3$ ]
$\sigma$	= normaalspanning [Pa]
$\tau$	= nagalmtijd [s]
$\varphi$	= fasehoek [rad]
$\omega$	= cirkelfrequentie [rad/s]

## 6.1 Harmonische trilling

Momentele uitwijking :  $u = U \sin \varphi = U \sin \omega t$

Frequentie :  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Cirkelfrequentie :  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{\varphi}{t}$

Momentele snelheid :  $v = \omega U \cos \omega t$

Momentele versnelling :  $a = -\omega^2 U \sin \omega t = -\omega^2 u$

Kracht op een systeem met massa  $m$  en stijfheid  $k$ :

$$F = -\omega^2 \cdot m \cdot u$$

*Stijfheid* van het systeem:

$$k = \frac{\text{veerkracht}}{\text{optredende verplaatsing}} = \left| \frac{F}{u} \right| = m\omega^2$$

Reciproke waarde van  $k$ : *slapheid*, *meegaandheid*, *compliantie* ( $c$ ).

*Eigen frequentie* van dit systeem:  $f_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{mc}}$

en de *trillingstijd*:  $T_e = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{mc}$

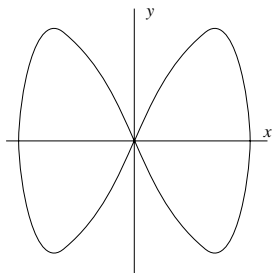
Tabel 6.1 Superpositie van harmonische trillingen

toestand	resulterende trilling
trillingsrichting en $f$ gelijk; amplitude en fase verschillend  $u_1 = U_1 \sin \omega t$  $u_2 = U_2 \sin(\omega t + \varphi)$	$u = u_1 + u_2 = U \sin(\omega t + \Psi)$ $\omega = \omega_1 = \omega_2$ $U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 \cos \varphi$  $\Psi = \arctan \frac{U_2 \sin \varphi}{U_1 + U_2 \cos \varphi}$
trillingsrichting en amplitude gelijk; frequenties verschillend	optreden van zwevings frequentie $f_s = f_2 - f_1$
trillingsrichtingen loodrecht op elkaar; amplitude, frequentie en fase verschillend	$x = U_1 \sin \omega_1 t$ $y = U_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)$ zie figuur 6.1

Periodetijd mathematische slinger:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

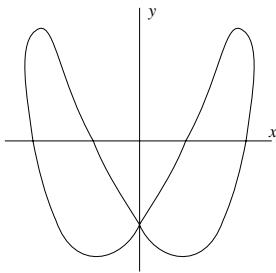
Gedempte trilling:

$$u = U e^{-\delta t} \sin \omega t$$



$$x = U \sin \omega_1 t$$

$$y = U \sin 2\omega_1 t$$



$$x = U \sin \omega_1 t$$

$$y = U \sin \left( 2\omega_1 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Figuur 6.1 Lissajous-figures (amplitude  $U$  in  $x$ - en  $y$ -richting gelijk)



## 6.2 Lopende golven

*Longitudinale* voortplanting: voortplantingsrichting van de golf valt samen met de trillingsrichting.

*Transversale* voortplanting: voortplantingsrichting van de golf staat loodrecht op de trillingsrichting.

*Voortplantingssnelheid* = snelheid waarmee de trillende beweging zich in de voortplantingsrichting voortplant:

$$c = f \cdot \lambda = \frac{\lambda}{T}$$

Voor de lopende golf in positieve  $x$ -richting is:

$$u = U \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) = U \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Voor een lopende golf in negatieve  $x$ -richting is:

$$u = U \sin \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) = U \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Voortplantingssnelheid in:

– gas :  $c = \sqrt{\frac{\gamma p_s}{\rho}}$  (longitudinaal, adiabatisch proces)

– lucht :  $f < 200$  Hz:  $c \approx 278 \sqrt{\frac{T}{273}} \approx 16,8 \sqrt{T}$

$f > 200$  Hz:  $c \approx 331 \sqrt{\frac{T}{273}} \approx 20,0 \sqrt{T}$

– vloeistof :  $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$  (longitudinaal)

– vaste stof :  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  (longitudinaal in dunne staaf)

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \quad (\text{longitudinaal in bulkmateriaal})$$

waarin:  $\nu =$  **dwarscontractiecoëfficiënt**

– koord :  $c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$  (transversaal)

### Groepssnelheid, fasesnelheid

Bij het samenstellen van twee lopende golven in dezelfde richting:

$$u_1 = U \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad \text{en} \quad u_2 = U \sin \omega' \left( t - \frac{x}{c'} \right)$$

ontstaat een lopende golf waarvan de amplitude langzaam fluctueert:

$$u = 2U \cos \frac{1}{2}(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

waarin:  $k = \frac{2\pi}{\lambda} =$  cirkelrepetentie

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \quad \text{en} \quad \Delta k = k' - k$$

Er zijn groepjes golven met amplitude tot  $2U$ , die zich voortplanten met de *groepssnelheid*:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

waarin:  $c =$  fasesnelheid

# Dwarscontractiecoëfficiënt

Door de aanwezige belastingen ondergaan constructies en onderdelen van constructies *vervormingen* die afhankelijk zijn van optredende spanningen.

Bij de berekening wordt als regel uitgegaan van *elastische vormveranderingen*, hetgeen betekent dat de optredende spanningen de 0,2% rekgrens niet mogen overschrijden.

## Wet van Hooke

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A \cdot E}$$

waarin:  $\sigma$  = optredende spanning (=F/A)  
 $\Delta l$  = verlenging over lengte  $l$

*Dwarscontractie*: het verschijnsel dat een staaf wanneer hij wordt gerekt, in de dwarsrichting dunner wordt.

*Dwarscontractiecoëfficiënt (constante van Poisson)*:  $\nu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$

waarin:  $\nu$  = waarde afhankelijk van het materiaal  
(voor metalen is  $\nu \approx 1/3$ )

Glijdingsmodulus:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

## 6.3 Staande golven

Een *staande golf* kan opgewekt worden door twee lopende golven met gelijke frequentie en amplitude, die zich in tegengestelde richting voortplanten:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ u_2 &= U \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow u = 2U \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

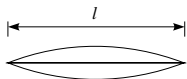
alles betrokken op hetzelfde punt  $x$ .

Amplitude van  $u$ :  $U' = 2U \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$

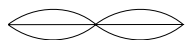
- maxima (buiken) voor:  $x = 0 \pm k \cdot \frac{1}{2} \lambda$
  - minima (knopen) voor:  $x = (1 \pm 2k) \frac{1}{4} \lambda$
- $$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## 6.4 Trilling van snaren en luchtkolommen (orgelpijpen)

**Gespannen snaar:** eigen trillingen zijn transversale golven.



grondtoon  $l = \frac{\lambda_0}{2}$   $f_0 = \frac{c}{2l}$



1e boventoon  $l = 2 \frac{\lambda_1}{2}$   $f_1 = \frac{2c}{2l}$

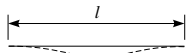


2e boventoon  $l = 3 \frac{\lambda_2}{2}$   $f_2 = \frac{3c}{2l}$

$k$ e boventoon  $l = (k+1) \frac{\lambda_k}{2}$   $f_k = (k+1) \frac{c}{2l}$

**Luchtkolommen:** eigen trillingen zijn longitudinale golven.

*Open orgelpijpen*



grondtoon

$$l = \frac{\lambda_0}{2}$$

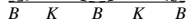
$$f_0 = \frac{c}{2l}$$



1e boventoon

$$l = 2 \frac{\lambda_1}{2}$$

$$f_1 = \frac{2c}{2l}$$



2e boventoon

$$l = 3 \frac{\lambda_2}{2}$$

$$f_2 = \frac{3c}{2l}$$

B = buik

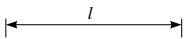
K = knoop

ke boventoon

$$l = (k + 1) \frac{\lambda_k}{2}$$

$$f_k = (k + 1) \frac{c}{2l}$$

*Gesloten (gedekte) orgelpijpen (aan één zijde open)*



grondtoon

$$l = \frac{\lambda_0}{4}$$

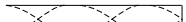
$$f_0 = \frac{c}{4l}$$



1e boventoon

$$l = 3 \frac{\lambda_1}{4}$$

$$f_1 = \frac{3c}{4l}$$



2e boventoon

$$l = 5 \frac{\lambda_2}{4}$$

$$f_2 = \frac{5c}{4l}$$

ke boventoon




$$l = (2k + 1) \frac{\lambda_k}{4}$$

$$f_k = (2k + 1) \frac{c}{4l}$$

## 6.5 Doppler-effect

Als geluidsbron B en punt van waarneming W zich ten opzichte van elkaar bewegen, zal de door W waargenomen frequentie  $f_w$  verschillen van de door B uitgezonden frequentie  $f$ . Bij passeren is  $\Delta f$  de waargenomen toonhoogte-verandering.

Tabel 6.2 Overzicht Doppler-effect

	 $\rightarrow f$	 $f_w \rightarrow$ 	
bewegings- richting	$\xrightarrow{v_B}$	$\xleftarrow{v_W}$	$f_w = f \frac{c + v_W}{c - v_B}$
	$\xleftarrow{v_B}$	$\xrightarrow{v_W}$	$f_w = f \frac{c - v_W}{c + v_B}$
	$\xrightarrow{v_B}$	$\xrightarrow{v_W}$	$f_w = f \frac{c - v_W}{c - v_B}$
	$\xleftarrow{v_B}$	$\xleftarrow{v_W}$	$f_w = f \frac{c + v_W}{c + v_B}$
passeren	$\xrightarrow{v_B}$	0	$\Delta f = f \frac{2c \cdot v_B}{c^2 - v_B^2} \approx f \frac{2v_B}{c}$
EM-golven (radar)			$f' = f \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$

## 6.6 Geluidslcer (akoestiek)

*Geluidssnelheid*: zie par. 6.2 *Lopende golven* (voortplantingssnelheid) en par. *Fysische gegevens*, tabel 1.16.

Momentele *geluidsdruk* ( $p$ ) = wisselende druk, gesuperponeerd op de statische (barometrische) druk ( $p_s$ ).

De luchtdeeltjes voeren een longitudinale trilling uit.

Momentele deeltjessnelheid =  $v$ .

Specifieke *akoestische impedantie*:  $Z_s = \frac{p}{v} = \rho c \cdot \cos \varphi$

waarin:  $\varphi$  = fasehoek tussen  $p$  en  $v$

Voor vlakke golf is  $\varphi = 0$ , dan geldt:

$$Z_s = R_a = \rho c = \textit{karakteristieke impedantie of golfweerstand}$$

Voor lucht van  $20^\circ\text{C}$ ,  $p = p_n$ :  $Z_s = 413 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$

$$\textit{Akoestische impedantie: } Z_a = \frac{Z_s}{A}$$

$$\textit{Geluidsintensiteit: } I = \frac{\textit{akoestisch vermogen } P}{\textit{oppervlakte } A} =$$

$$= \frac{1}{2} \rho c \hat{v}^2 = \frac{P_{\text{eff}}^2}{\rho c}$$

waarin:  $\hat{v}$  = snelheidsamplitude

$$\textit{Energiedichtheid: } E = \frac{I}{c} \text{ (voor vlakke golf)}$$

Voor een zaal geldt:

$$P_0 \approx 13,8 \frac{V_z \cdot E_0}{\tau} [\text{W}]$$

waarin:

$P_0$  = benodigde vermogen van geluidsbron voor gemiddelde energiedichtheid  $E_0$

$V_z$  = zaalvolume [ $\text{m}^3$ ]

$\tau$  = nagalmtijd [s]

$$\textit{Intensiteitsniveau: } L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} [\text{dB}]$$

waarin:  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  = standaardintensiteit

$$\textit{Geluidsdrukkniveau: } L_p = 20 \log \frac{p}{p_0} [\text{dB}_{\text{SPL}}] \quad (\text{zie tabel 6.3})$$

waarin:  $p_0 = 20 \mu\text{Pa}$  = standaarddruk, bij 1000 Hz nog net waarneembaar.

Tabel 6.3 Geluidsdrukkniveau van diverse geluidsbronnen

$L_p$ (dB t.o.v. $20 \mu\text{Pa}$ )	geluidsbron
0	gehoordrempel
20	bladgeritsel
40	rustige kamer
60	normaal gesprek
80	straatlawaaï
100	symfonie-orkest
120	pijn grens

*Luidheid*:  $S$  = gewaarwording van geluidsgolven door het oor [soon]

$$S = 2^{0,1(L_I - 40)} \text{ of: } \log S = 0,03 L_I - 1,2$$

*Luidheidsniveau*  $L_N$  [foon]. Alleen bij 1000 Hz valt de schaal van  $L_N$  (in foons) en de schaal van  $L_I$  (in dB) samen. [Figuur 6.2](#) laat verschillende *isofonen* zien.

Wanneer bij geluiden beneden ong. 55 dB wordt gemeten met een correctie voor de gehoor-frequentiegevoeligheid, dan worden de meetresultaten gewoonlijk in dB(A) opgegeven. De 40-foon curve wordt dan als referentie gebruikt (vastgelegd door de *International Organization for Standardization, ISO*).

### Geluidsabsorptie

*Absorberend vermogen* van een oppervlak in een gesloten ruimte, uitgedrukt in  $\text{m}^2$  ‘open raam’ (sabine):

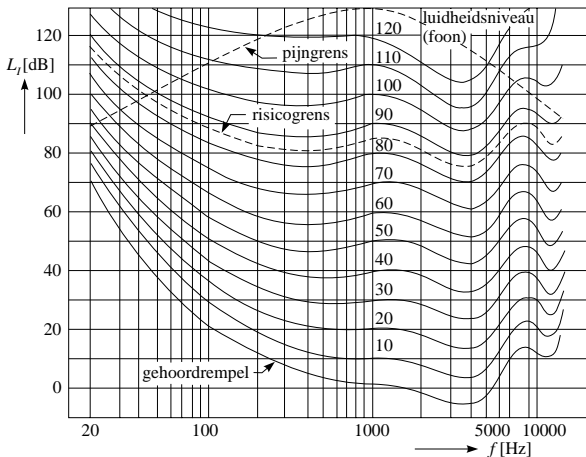
$$A_s = a \cdot A$$

$a$  = absorptiecoëfficiënt (materiaalconstante)

$$= \frac{\text{niet teruggekaatste geluidsenergie}}{\text{opvallende energie}}$$

Gemiddelde geluidsintensiteit in een ruimte:  $I_{\text{gem}} = \frac{P}{A_s}$





Figuur 6.2 Isofonen volgens Robinson en Dadson (Opmerking: de risicogrens is afhankelijk van de duur van de blootstelling aan het geluid en wordt door de wetgever voor de industrie vastgelegd)

## Geluidsisolatie

Voor een wand geldt:  $i = 10 \log \frac{I_i}{I_d}$  [dB]

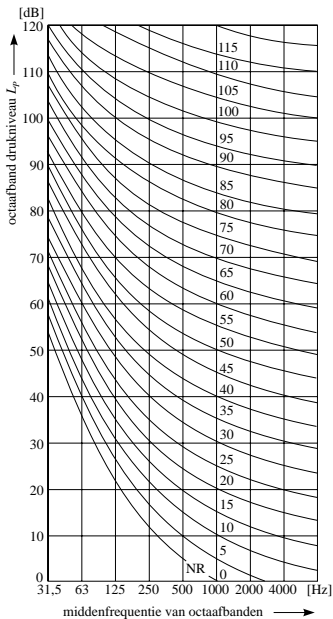
waarin:

$I_i$  = intensiteit invallende geluid

$I_d$  = intensiteit doorgelaten geluid

Massawet van Rayleigh:  $i = 20 \log \frac{\omega \cdot m}{2Q \cdot c}$

waarin:  $m$  = massa van de wand



Figuur 6.3 Noise Rating (NR) krommen

**Nagalmtijd** van een ruimte (volume  $V$  en absorberend vermogen  $A_s$ ):

$$\tau = -\frac{55}{c} \frac{V}{A \ln(1 - \langle a \rangle)} \approx \frac{1}{6} \frac{V}{A_s} \quad (\text{Wet van Sabine})$$

waarin:

$A$  = totale wandoppervlakte

$\langle a \rangle$  = gem. absorptiecoëff. van de wandmaterialen

## Geluidshinder

Meetsystemen:

- geluidsdrukkniveau in dB(A), zie [Luidheidsniveau](#);
- volgens octaafband-meting en gebruik van *Noise Rating (NR) krommen* (numeriek gelijk aan octaafband-niveau in 1 kHz band), zie [figuur 6.3](#).

Voor lawaai-belasting ( $B$ ) t.g.v. vliegtuigbewegingen in de buurt van woongebieden wordt de *kosteneenheid* ( $Ke$ ) als eenheid gebruikt.

$$B = 20 \log \Sigma(n \cdot 10^{L/15}) - 157 \quad [Ke]$$

waarin:

$\Sigma$  = somming over alle vliegtuigbewegingen in een jaar met  $L > 75$  dB(A)

$n$  = nachtstrafactor (1 overdag, 1 tot 10 op andere tijden van het etmaal)

$L$  = maximale geluidsdrukkniveau buiten [dB(A)]

## 7 Licht en optica

### Symbolen

$A$  = oppervlakte [ $m^2$ ], numerieke apertuur [–]

$b$  = beeldpuntsafstand [m]

$c$  = lichtsnelheid in een medium [m/s]

$c_0$  = lichtsnelheid in vacuüm [m/s]

$d$  = dikte [m]

$d_n$  = nabijheidspunt [m]

$E$  = verlichtingssterkte [lx]

$f$  = frequentie [Hz]; brandpuntsafstand [m]

$g$  = grenshoek [rad]

$H$  = belichting [ $lx \cdot s$ ]

$I$  = lichtsterkte [cd]

$i$  = invalshoek [rad]

$K$  = lichtefficiëntie [–]

$L$  = luminantie [ $cd/m^2$ ] = [nit]

$n$  = brekingsindex (voor glas:  $n_g$ ) [–]

$Q$  = hoeveelheid licht [ $lm \cdot s$ ]

$R$	=	straal [m]
$r$	=	straal, afstand [m]; brekingshoek [rad]
$t$	=	terugkaatsingshoek [rad]
$V_{\text{lin}}$	=	lineaire vergroting [–]
$V_{\text{ang}}$	=	angulaire (hoek)-vergroting [–]
$V(\lambda)$	=	spectrale ooggevoeligheidsfactor [–]
$v$	=	voorwerpsafstand, verschuiving [m]
$\alpha$	=	gezichtshoek; openingshoek [rad]
$\beta$	=	gezichtshoek [rad]; tophoek prisma [rad]
$\delta$	=	deviatie; afwijking [rad]
$\varepsilon$	=	$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ = permittiviteit [F/m]
$\lambda$	=	golflengte [m]
$\mu$	=	$\mu_0 \cdot \mu_r$ = permeabiliteit [H/m]
$\Phi_e$	=	stralingsenergiestroom [W]
$\Phi_v$	=	lichtstroom [lm]
$\Omega$	=	ruimtehoek [sr]

## 7.1 Lichtsnelheid

In vacuüm:  $c_0 = 299,792\,458 \times 10^6 \approx 3 \times 10^8$  m/s.

In lucht mag deze snelheid ook gehanteerd worden.

Doorzichtig medium: lichtsnelheid altijd kleiner dan die in vacuüm ( $c < c_0$ ).

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \quad \frac{c}{c_0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}$$

Algemeen geldt voor het verband tussen snelheid, frequentie en golflengte:

$$c = f \cdot \lambda$$

Een door een bron uitgezonden lichtstroom behoudt zijn frequentie bij overgang naar een ander medium:

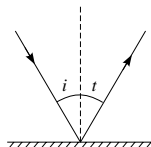
$$\frac{c}{\lambda} = \text{constant}$$

De kleur wordt door de frequentie bepaald.

## 7.2 Terugkaatsing (reflectie)

Algemene wet van terugkaatsing:

hoek van inval = hoek van terugkaatsing, waarbij de hoeken gemeten worden t.o.v. de normaal op het oppervlak in het punt van terugkaatsing.



Figuur 7.1  $i = t$

### Vlakke spiegel

- Voorwerp en beeld liggen symmetrisch t.o.v. het spiegelvlak.
- Het spiegelbeeld is virtueel.

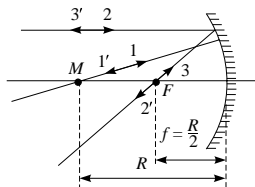
### Gebogen spiegel

- Algemeen *sferisch* (deel van een bol) met middelpunt  $M$ . Op de *hoofdas* ligt het *hoofdbrandpunt*  $F$  op afstand  $\frac{1}{2}r = f$  van de spiegel.  $f = \text{brandpuntsafstand}$ .
- *Holle spiegel*: een evenwijdige stralenbundel convergeert naar  $F$ .
- *Bolle spiegel*: een evenwijdig invallende stralenbundel divergeert schijnbaar vanuit  $F$ .

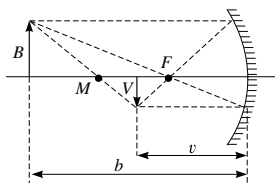
Figuren 7.2 en 7.3 laten zien:

- $a$  de stralengang van een paar karakteristieke stralen;
- $b$  de constructie van beeld  $B$  uit voorwerp  $V$ .

**Afbeeldingsformule** voor gebogen (sferische) spiegels:  $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

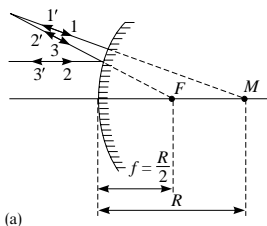


(a)

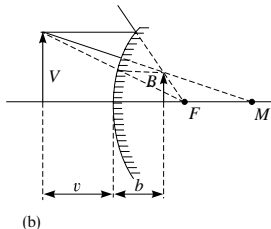


(b)

Figuur 7.2 *Holle spiegel*



(a)



(b)

Figuur 7.3 Bolle spiegel

Reëel voorwerp, beeld:  $v, b > 0$ ; virtueel:  $v, b < 0$

Holle spiegel:  $f > 0$ ; bolle spiegel:  $f < 0$

*Reëel beeldpunt:* gevormd door snijpunt van teruggekaatste lichtstralen (men kan het op een scherm opvangen).

*Virtueel beeldpunt:* gevormd door de verlengden van de teruggekaatste lichtstralen.

**Lineaire vergroting:**  $V_{\text{lin}} = \left| \frac{b}{v} \right|$

*Opmerking:* bij gebogen spiegels geldt het bovenstaande alleen voor kleine invalshoeken; bij grote invalshoeken treedt *sferische abberatie* op.

## 7.3 Breking (refractie)

Als een lichtstraal een grensvlak van twee doorzichtige stoffen passeert, vindt *breking* van die lichtstraal plaats volgens figuur 7.4:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

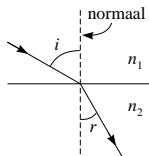
(wet van Snellius)

De verhouding van de *brekingsindices* is:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_2}{c_1}$$

Algemeen is:  $n = \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r} = \frac{c_0}{c}$

Voor vacuüm (lucht) is  $n = 1$ .  
Zie ook par. [Fysische gegevens](#),  
tabel 1.17.



Figuur 7.4 Breking

Is stof 2 glas dan is:  $\sin i = n_g \sin r = \frac{c_0}{c_g} \sin r$

Meestal opgegeven: *absolute brekingsindex* t.o.v. vacuüm.  
De brekingsindex is afhankelijk van de golflengte van het gebruikte licht (*dispersie*) en van de temperatuur.  
Dispersie is oorzaak van de kleursifting in prisma's.

### Grenshoek

De *grenshoek* is de invalshoek bij een overgang van optisch dichter naar optisch minder dichte stof ( $n_1 > n_2$ ), waarbij  $r = 90^\circ$ :

$$\sin g = \frac{1}{n_g} \quad (\text{voor glas} \rightarrow \text{lucht})$$

*Totale terugkaatsing* als  $i > g$  (voor glas  $\rightarrow$  lucht  $g \approx 42^\circ$ )

### Breking in planparallele plaat (figuur 7.5)

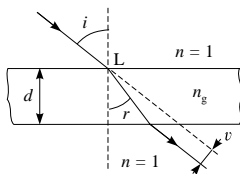
Verschuiving:  $v = \frac{d}{\cos r} \sin(i - r)$

### Breking in prisma in lucht (fig. 7.6)

Er treedt *afwijking* of *deviatie*  $\delta$  op t.g.v. dubbele breking.

Minimale deviatie als:

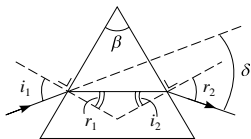
$i_1 = r_2$  en  $r_1 = i_2$   
 $\delta_{\min}$  te bepalen uit:



Figuur 7.5  
Planparallele plaat

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\beta}$$

waarin:  $\beta$  = tophoek van het prisma

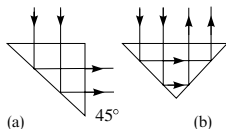


*Totale terugkaatsing in een prisma*  
Gebruikmakend van de terugkaatsing voor  $i > g$  zijn er twee toepassingen (zie figuur 7.7):

- spiegelprisma;
- omkeerprisma (hier spreekt men van *retroreflectie*).

Van beide prisma's zijn de hoeken:  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  en  $90^\circ$ .

Figuur 7.6 Prisma



Figuur 7.7  
Totale terugkaatsing

## 7.4 Lenzen

*Sferische lenzen*: doorzichtige lichamen begrensd door gedeelten van boloppervlakken.

*Bolle lens*: in het midden het dikst, positief, convergerend,  $f > 0$ .

*Holle lens*: in het midden het dunst, negatief, divergerend,  $f < 0$ .

*Hoofdas*: as door de middelpunten van de samenstellende boloppervlakken.

*Hoofdbrandpunten*  $F_1$  en  $F_2$ : liggen op afstanden  $f_1$  resp.  $f_2$  van het midden van de lens.

*'Dunne' lens*: lens waarvoor gesteld mag worden  $|f_1| = |f_2| = f$ .

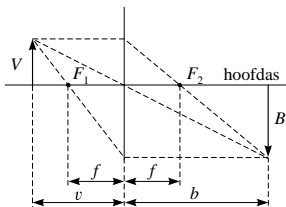
*Paraxiale lichtstralen*: lichtstralen die een kleine hoek ( $< 10^\circ$ ) met de hoofdas maken.

De Wet van Snellius wordt dan:  $n_1 i = n_2 r$ .

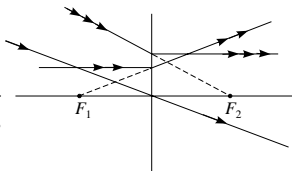
Voor de *brandpuntsafstand* van een dunne lens geldt:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$





Figuur 7.8a Bolle lens



Figuur 7.8b Holle lens

waarin:

$$n = \frac{n(\text{lens})}{n(\text{omgeving})} \quad (\text{lens in lucht: } n = n_{\text{glas}})$$

$R_1$  en  $R_2$  = stralen van samenstellende bollen ( $R > 0$ : bol naar buiten;  $R < 0$ : hol naar buiten)

Sterkte van de lens =  $\frac{1}{f}$ , uitgedrukt in *dioptrie* ( $\text{m}^{-1}$ ).

$$\text{Algemene lensformule: } \frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Reëel voorwerp, beeld :  $v, b > 0$

Virtueel voorwerp, beeld:  $v, b < 0$

*Opmerking.* Zie voor definities *reëel* en *virtueel* par. 7.2; lees voor teruggekaatst: gebroken.

$$\text{Systeem van tegen elkaar geplaatste lenzen: } \frac{1}{f_s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\text{Voor twee lenzen op afstand } d: \frac{1}{f_s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

## 7.5 *Vergroting, optische instrumenten*

*Lineaire vergroting* = verhouding van de lijn-lengte van het beeld tot de lijn-lengte van het voorwerp:

$$V_{\text{lin}} = \left| \frac{b}{v} \right| = \left| \frac{\text{beeldafstand}}{\text{voorwerpafstand}} \right|$$

*Hoekvergroting* =  $\frac{\text{gezichtshoek } \beta \text{ met instrument}}{\text{gezichtshoek } \alpha \text{ zonder instrument}}$

$$V_{\text{ang}} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$$

*Loep*:  $V_{\text{ang}} = \frac{d_n}{f}$

waarin:  $d_n = \text{nabijheidspunt}$ , wordt voor een normaal oog op 0,25 m gesteld

*Microscoop*:  $V_{\text{ang}} = V_{\text{lin. obj.}} \cdot V_{\text{ang. oc.}} = V_{\text{lin. obj.}} \cdot \frac{0,25}{f_{\text{oc.}}}$

index: obj. = objectief = lens bij het voorwerp  
oc. = oculair = lens bij het oog = loep

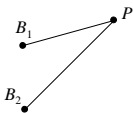
*Scheidend vermogen* bij ronde opening:

$$y = \frac{1,22 \lambda}{2A} = \frac{0,61 \lambda}{n \sin \frac{1}{2} \alpha} \text{ (Abbe)}$$

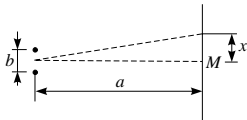
waarin:  $n \sin \frac{1}{2} \alpha = A = \text{numerieke apertuur}$   
 $\alpha = \text{openingshoek aan voorwerpszijde}$

## 7.6 *Interferentie en buiging*

Twee *trillingsbronnen*  $B_1$  en  $B_2$  trillen in fase (figuur 7.9).  
Voor punt  $P$  geldt  $B_1P - B_2P = \Delta s$ :



Figuur 7.9 Trillingsbronnen



Figuur 7.10 Trillingsbronnen (dicht bij elkaar)

- maximale amplitude voor  $\Delta s = 2k \frac{\lambda}{2}$
- minimale amplitude voor  $\Delta s = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$

De maxima en minima liggen op hyperbolen. In beide gevallen is  $k = 0, 1, 2, \dots$

In figuur 7.10 is afstand tussen de trillingsbronnen  $b \ll a$ . De maxima en minima bevinden zich dan bij:

$$x = \frac{a}{b} \Delta s$$

Bepaling van golflengte met behulp van afstand  $d$  tussen eerste minima ter weerszijden van  $M$ :

$$\lambda = \frac{db}{a}$$

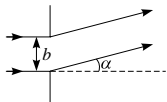
### Buiging door een spleet (spleetbreedte $b$ )

- minima bij  $\sin \alpha = \frac{k\lambda}{b}$
  - maxima bij  $\sin \alpha = \frac{2k + 1}{2b} \lambda$
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{minima} \\ \text{maxima} \end{matrix}} \right\} k = 1, 2, 3, \dots$$

en  $\alpha = 0$

Voor kleine  $\alpha$ :  $\alpha(1\text{e min.}) = \frac{\lambda}{b}$

Voor cirkelvormige opening met diameter  $D$ :  $\alpha(1\text{e min.}) = 1,22 \frac{\lambda}{D}$



Figuur 7.11  
Buiging door spleet

**Buiging door tralie (tralieconstante  $p$ )**

Hoofdmaxima voor  $\sin \alpha = \frac{k\lambda}{p}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Wanneer er  $n$  spleten zijn liggen er  $n - 1$  minima tussen twee hoofdmaxima.

## 7.7 Glasvezelkabel

Stap-indexvezel met kern (brekingsindex  $n_k$ ) en mantel ( $n_m$ ).

Voor grenshoek  $\vartheta_g$  geldt:  $\cos \vartheta_g = \frac{n_m}{n_k}$

Voor de acceptatiehoek  $\alpha$  geldt:

$$\alpha = 2 \arcsin n_k \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_g} = 2 \arcsin(n_k \cdot \sin \vartheta_g)$$

Wanneer  $\frac{n_m}{n_k} = 0,99$  is:  $\vartheta_g \approx 8^\circ$  en  $\alpha \approx 24^\circ$ .

## 7.8 Straling en licht

Licht is een vorm van *elektromagnetische straling* in het frequentie-interval van 385 THz ( $\lambda = 780$  nm) tot 790 THz ( $\lambda = 380$  nm). In dit interval is de straling zichtbaar voor het menselijk oog.

*Monochromatisch licht* is licht van één golflengte.

Het oog is niet even gevoelig voor alle golflengten (kleuren). Figuur 7.12 geeft de *spectrale ooggevoelighedsfactor*  $V(\lambda)$  voor

een standaardoog als functie van  $\lambda$ . Bij 555 nm (geelgroen) treedt de grootste gevoeligheid op.

De lichtstroom  $\Phi_v$  is de stralingsenergiestroom gewaardeerd volgens de fotopische ooggevoeligheidskromme (opgenomen bij grote luminantie).

$$\Phi_v = K \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} V(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda$$

waarin:

$\Phi_{e\lambda}$  = spectraal stralingsvermogen [W/m]

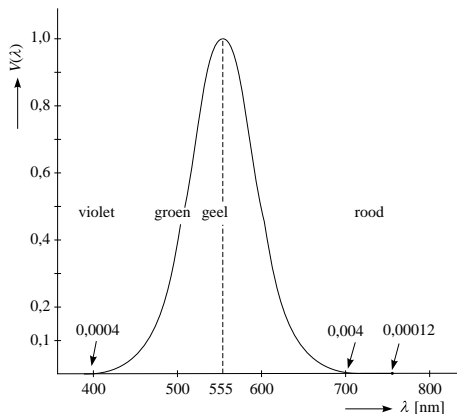
$\Phi_{e\lambda} d\lambda$  = stralingsvermogen over golflengtegebiedje  $d\lambda$  [W]

$K$  = fotometrisch lichtequivalent = 682 lm/W

Bij een andere golflengte is:

$$\Phi_v(\lambda) = K \cdot V(\lambda) \Phi_{e\lambda}$$

N.B. de indices e (bij elektromagnetische straling) en v (bij licht) alleen gebruiken bij *gelijktijdig* optreden van straling en licht.



Figuur 7.12 Fotopische ooggevoeligheidskromme

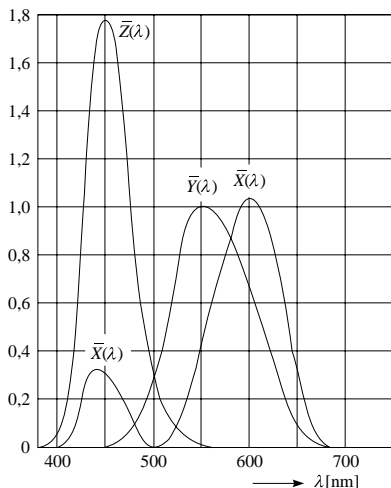
## 7.9 Kleuren en kleurmeetkunde

Tabel 7.1 Enige kleuren (kleurstimuli) met bijbehorende golflengtegebieden (voor overgangskleuren, zie kleurendriehoek, figuur 7.14)

kleur	golflengte [nm]	kleur	golflengte [nm]
violet	380–420	geel	560–590
blauw	420–490	oranje	590–610
groen	490–560	rood	610–780

Kleurdefinitie CIE (Commission Internationale d'Eclairage):

- Spectrale tristimuluswaarden of distributiegetallen  $\bar{X}(\lambda)$ ,  $\bar{Y}(\lambda)$  en  $\bar{Z}(\lambda)$ , in figuur 7.13 gegeven als functie van  $\lambda$  voor het equi-energiespectrum.



Figuur 7.13 Spectrale distributiekrommen  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  en  $\bar{Z}$

- *Trichromatische kleurcoëfficiënten*, gedefinieerd volgens:

$$X = K \int \bar{X}(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda$$

$$Y = K \int \bar{Y}(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda$$

$$Z = K \int \bar{Z}(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda$$

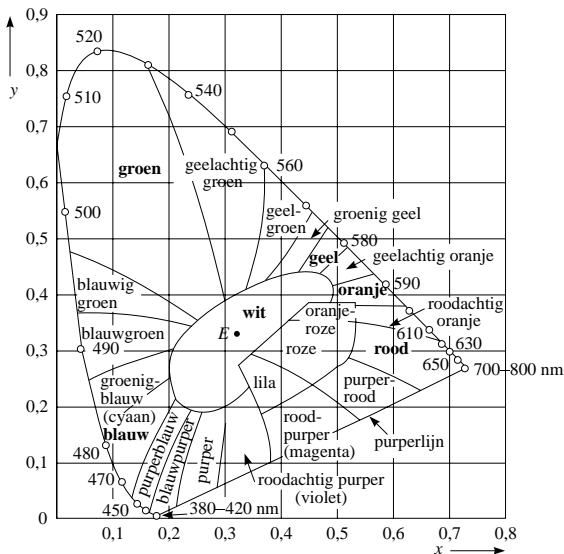
- *Kleurcoördinaten*  $x$ ,  $y$  en  $z$ , af te leiden uit  $X$ ,  $Y$  en  $Z$ :

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}; \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z}; \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z}$$

$$x + y + z = 1$$

$x$  en  $y$  zijn de coördinaten in de *kleurendriehoek*, (figuur 7.14).

$E$  = *witpunt* (equal energy white), waarvoor  $x = y = 0,333$ .



Figuur 7.14 Kleurendriehoek met kleurgebieden volgens L.K. Kelly

## 7.10 Fotometrie

Door een *lichtbron* wordt uitgezonden:

- Lichtstroom  $\Phi$  [lumen], te vergelijken met de stralingsenergiestroom  $\Phi$  [W].
- Hoeveelheid licht  $Q = \int \Phi dt$  [lm·s], komt overeen met de stralingsenergie  $Q$  [J].

Aan de lichtbron kent men nu toe:

c Lichtsterkte  $I = \frac{\Phi}{\Omega}$  [lm/sr = cd]

(de candela is een grondeenheid, zie [Eenheden en symbolen](#))

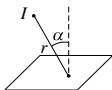
Op een verlicht vlak heerst een:

d Verlichtingssterkte  $E = \frac{\Phi}{A}$  [lm/m<sup>2</sup> = lux = lx]

Uitgaande van de lichtsterkte  $I$  is de verlichtingssterkte in een punt van een vlak op afstand  $r$ :

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$$

waarin:  $\alpha$  = invalshoek



Figuur 7.15

Een objectieve maat voor de *helderheid* van een lichtbron:

e Luminantie  $L = \frac{I}{A}$  [cd/m<sup>2</sup> = nit]

Voor een diffuus stralend oppervlak geldt voor de lichtsterkte in de richting  $\alpha$  met de normaal:

$$I_{\alpha} = I \cos \alpha \quad (\text{cosinuswet van Lambert})$$

Bij de fotografie speelt een rol:

f Belichting  $H = \int E dt$  [lx·s]



## 8 Elektriciteitsleer

$A$	= oppervlakte; doorsnede [ $\text{m}^2$ ]
$B$	= magnetische inductie [ $\text{T}$ ]; susceptantie [ $\text{S}$ ]
$B_i$	= magnetische polarisatie [ $\text{T}$ ]
$B_n$	= component van $B \perp$ betreffende vlak [ $\text{T}$ ]
$C$	= capaciteit [ $\text{F}$ ]
$D$	= diëlektrische verplaatsing = fluxdichtheid [ $\text{C}/\text{m}^2$ ]
$D_n$	= component van $D \perp$ betreffende vlak [ $\text{C}/\text{m}^2$ ]
$D$	= diameter [ $\text{m}$ ]
$d$	= afstand [ $\text{m}$ ]
$E$	= elektrische veldsterkte [ $\text{V}/\text{m}$ ]; spanning [ $\text{V}$ ]
$E_i$	= geïnduceerde spanning [ $\text{V}$ ]
$F$	= kracht [ $\text{N}$ ]; vormfactor [ $-$ ]
$G$	= geleiding of conductantie [ $\text{S}$ ]
$H$	= magnetische veldsterkte [ $\text{A}/\text{m}$ ]
$H_s$	= component van $H$ langs een kromme [ $\text{A}/\text{m}$ ]
$I$	= stroom [ $\text{A}$ ]
$J$	= stroomdichtheid [ $\text{A}/\text{m}^2$ ]; (magnetische polarisatie [ $\text{T}$ ])
$j$	= magnetisch dipoolmoment [ $\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{A}$ ]
$k$	= koppelfactor [ $-$ ]
$L$	= zelfinductie [ $\text{H}$ ]
$M$	= mutuele inductie [ $\text{H}$ ]; magnetisatie [ $\text{A}/\text{m}$ ]
$m$	= magnetisch moment [ $\text{A}\cdot\text{m}^2$ ]
$N$	= aantal windingen [ $-$ ]
$P$	= polarisatie [ $\text{C}/\text{m}^2$ ]; vermogen [ $\text{W}$ ]
$p$	= elektrisch dipoolmoment [ $\text{C}\cdot\text{m}$ ]
$Q, q$	= lading [ $\text{C}$ ]; blindvermogen [ $\text{W}$ ]
$R$	= weerstand [ $\Omega$ ]; straal v. cirkel, cilinder, bol [ $\text{m}$ ]
$R_m$	= reluctantie [ $\text{H}^{-1}$ ]
$r$	= afstand [ $\text{m}$ ]
$S$	= poynting vector [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]; schijnvermogen [ $\text{W}$ ]
$s$	= weglengte [ $\text{m}$ ]
$T$	= periode [ $\text{s}$ ]
$t$	= tijd [ $\text{s}$ ]
$U$	= spannings(potentiaal) verschil [ $\text{V}$ ]
$U_m$	= magnetische bronspanning [ $\text{A}$ ]
$V$	= potentiaal [ $\text{V}$ ]
$v$	= snelheid [ $\text{m}/\text{s}$ ]
$W$	= energie [ $\text{J}$ ]

$w$  = energie-dichtheid [ $\text{J}/\text{m}^3$ ]

$X$  = reactantie [ $\Omega$ ]

$Y$  = admittantie [ $\text{S}$ ]

$Z$  = impedantie [ $\Omega$ ]

$\alpha$  = temperatuurscoëfficiënt [ $\text{K}^{-1}$ ]

$\gamma(\sigma)$  = soortelijke geleiding, conductiviteit [ $\text{S}/\text{m}$ ]

$\varepsilon$  = permittiviteit [ $\text{F}/\text{m}$ ]

$\kappa(\chi_m)$  = magnetische susceptibiliteit [ $-$ ]

$\mu$  = permeabiliteit [ $\text{H}/\text{m}$ ]; beweeglijkheid [ $\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ ]

$\rho$  = soortelijke weerstand, resistiviteit [ $\Omega\cdot\text{m}$ ]

$\Phi$  = magnetische flux [ $\text{Wb}$ ]

$\chi(\chi_e)$  = elektrische susceptibiliteit = polariseerbaarheid [ $-$ ]

$\Psi$  = elektrische flux [ $\text{C}$ ]

$\omega$  = cirkelfrequentie [ $\text{s}^{-1}$ ]

## 8.1 Elektrostatica

### Lading

Voor de kracht  $F$  [ $\text{N}$ ] tussen twee *puntladingen*  $Q_1$  en  $Q_2$  [ $\text{C}$ ] op een afstand  $r$  [ $\text{m}$ ] van elkaar geldt:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{wet van Coulomb})$$

waarin:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \text{diëlektrische constante (permittiviteit)}$

$\varepsilon_r = \text{relatieve permittiviteit}$ ; de waarde hiervan wordt door het medium bepaald (zie par. [Fysische gegevens, tabel 1.18](#)).

In vacuüm:  $\varepsilon_r = 1$ .

*Kracht op een lading*  $Q$  in een homogeen elektrisch veld  $E$ :

$$F = E \cdot Q \quad [\text{N}]$$

### Veldsterkte

Rondom een puntlading  $Q$  is de *veldsterkte* op afstand  $r$ :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad [\text{V}/\text{m}]$$

*Eerste hoofdstelling:* langs een gesloten kromme geldt:

$$\oint E \cdot ds = 0$$

*Potentiaal:* tussen punten  $A$  en  $B$  heerst in een veld  $E$  een *potentiaalverschil* (of *spanning*):

$$V_A - V_B = \int_A^B E \cdot ds = U_{AB} \text{ [V]}$$

Potentiaal op afstand  $r$  van lading  $Q$ :  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r}$

*Tweede hoofdstelling:* de oppervlakte-integraal van de normaalcomponent  $D_n$  van de diëlektrische verplaatsing is gelijk aan de totaal ingesloten lading:

$$\oiint D_n dA = \Sigma Q = \Psi \quad (\text{stelling van Gauss})$$

$\Psi =$  elektrische flux [C]

$D = \Psi/A = \epsilon E =$  diëlektrische verplaatsing = fluxdichtheid [C/m<sup>2</sup>]

$$D = \epsilon_0 E + P$$

waarin:

$$P = \text{polarisatie} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E = \epsilon_0\chi E$$

$$\chi = \epsilon_r - 1 = \text{elektrische susceptibiliteit} (= \text{polariseerbaarheid})$$

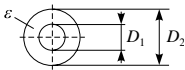
$$\text{Capaciteit: } C = \frac{Q}{U} = \int \frac{idt}{U}$$

$$\text{Vlakke condensator} \quad : C = \frac{\epsilon A}{d} \quad \begin{array}{l} \text{plaatopp.: } A \text{ [m}^2\text{]} \\ \text{plaatafstand: } d \text{ [m]} \end{array}$$

$$\text{Vlakke condensator met 2 media} \quad : C = \frac{A}{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}$$

$$\text{Bol-condensator} \quad : C = 2\pi\epsilon D$$

$$\text{Concentrische bollen} \quad : C = 2\pi\epsilon \frac{D_1 D_2}{D_2 - D_1}$$



Coaxiale cilinder:  $C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln D_2/D_1}$

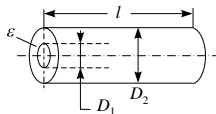
Evenwijdige cilindrische geleiders:

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln [d/D + \sqrt{(d/D)^2 - 1}]}$$

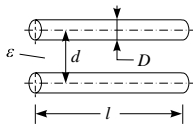
$$\approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln(d/D)} \quad (\text{voor } d \gg D)$$

Energie-inhoud van condensator:

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \quad [\text{J}]$$



Figuur 8.1  
Coaxiale cilinder



Figuur 8.2 Evenw.  
cilindrische geleiders

Energiedichtheid in homogeen elektrisch veld:

$$w = \frac{1}{2}E \cdot D = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

Kracht tussen de platen van een vlakke condensator:

$$F = \frac{1}{2}E \cdot D \cdot A = \frac{1}{2}Q \cdot E \quad [\text{N}]$$

Parallelschakeling van condensatoren:  $C_p = C_1 + C_2 + \dots$

Serieschakeling van condensatoren:  $1/C_s = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots$

Elektrische dipool: twee tegengestelde ladingen  $+Q$  en  $-Q$  op onderlinge afstand  $l$ .

Elektrisch dipoolmoment:  $p = |Q| \cdot l \quad [\text{C} \cdot \text{m}]$

## 8.2 Elektrodynamica, stroomgeleiding

$$\text{Stroom: } I = \frac{dQ}{dt} \quad [\text{A}]$$

$$\text{Stroomdichtheid: } J = \frac{I}{A} \quad [\text{A/m}^2]$$

### Wet van Ohm:

– specifiek:  $J = \gamma \cdot E$

– in  $U, I$  en  $R$ :  $U = I \cdot R, \quad I = \frac{U}{R}, \quad R = \frac{U}{I}$

– in  $U, I$  en  $G$ :  $I = G \cdot U$

waarin:

$$R = \text{weerstand van de geleider} = \rho \frac{l}{A} \quad [\Omega]$$

$$\rho = \text{soortelijke (specifieke) weerstand} \quad [\Omega \cdot \text{m}]$$

$$G = \text{geleiding} = 1/R \quad [\text{S}]$$

$$\gamma = \text{soortelijke (specifieke) geleiding} = 1/\rho \quad [\text{S/m}]$$

$$\gamma = |n_- \cdot \mu_- \cdot q_-| + n_+ \cdot \mu_+ \cdot q_+$$

$$n = \text{aantal deeltjes per m}^3$$

$$q = \text{deeltjeslading} \quad [\text{C}]$$

$$\mu = \text{beweeglijkheid deeltjes} \quad [\text{m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})]$$

index  $-$ : negatief geladen deeltjes

index  $+$ : positief geladen deeltjes

In metalen alleen elektronen met lading  $-e$ .

Temperatuurscoëfficiënt  $\alpha$  van soortelijke weerstand:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

Temperatuursafhankelijkheid van weerstand:

$$R_2 = R_1(1 + \alpha \Delta T)$$

*Serieschakeling*  $n$  weerstanden :  $R_s = \sum_{i=1}^n R_i$

*Parallelschakeling*  $n$  weerstanden:  $G_p = \sum_{i=1}^n G_i$  of  $\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$

*Warmte-ontwikkeling* in geleider met weerstand  $R$ :

Energie  $W = \int U \cdot I \cdot dt = \int P \cdot dt$

Vermogen  $P = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$

**Ster/driehoek-transformatie**

**Wetten van Kirchhoff**

**Théorema's van Thévenin en Norton**

## 8.3 *Wisselstromen*

**Tabel 8.1** geeft een overzicht van begrippen.

Tabel 8.1 Wisselstromen: schrijfwijzen

'sinusvormige' schrijfwijze

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \vartheta)$$

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \psi)$$

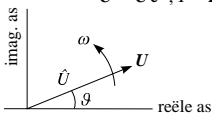
$\hat{U}, \hat{I}$ : amplitude  
 $u, i$ : momentele waarde  
 $\vartheta, \psi$ : fasehoek

'complexe' schrijfwijze

$$\mathbf{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \vartheta)} = U e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{i} = \hat{I} e^{j(\omega t + \psi)} = I e^{j\omega t}$$

$$U = \hat{U} e^{j\vartheta}; I = \hat{I} e^{j\psi}$$



$U, I$ : wijzer of fasor  
 $\hat{U}, \hat{I}$ : modulus  
 $\vartheta, \psi$ : argument

### impedantie ( $Z$ )

$$\text{impedantie: } Z = \frac{U}{I}$$

$U, I$ : effectieve waarde (zie ook tabel 8.2)

$$\text{modulus: } |Z| = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

$$\text{argument: } \varphi = \vartheta - \psi$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{j(\vartheta - \psi)} = |Z| e^{j\varphi}$$

$$Z = R + jX; |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$R = |Z| \cos \varphi; X = |Z| \sin \varphi$$

### admittantie ( $Y$ )

$$\text{admittantie: } Y = \frac{I}{U}$$

$$\text{modulus: } |Y| = \frac{\hat{I}}{\hat{U}}$$

$$\text{argument: } -\varphi = \psi - \vartheta$$

$$Y = \frac{I}{U} = |Y| e^{-j\varphi}$$

$$Y = G + jB$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

### differentiëren van sinusvormige grootheid (spanning)

$$\frac{du}{dt} = \omega \hat{U} \cos(\omega t + \vartheta)$$

$$= \omega \hat{U} \sin\left(\omega t + \vartheta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = j\omega \hat{U} e^{j(\omega t + \vartheta)}$$

$$= j\omega \mathbf{u} = \omega \mathbf{u} e^{j\pi/2}$$

### integreren van sinusvormige grootheid (spanning)

$$\int u dt = \frac{\hat{U}}{\omega} \sin\left(\omega t + \vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$$

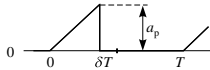
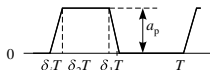
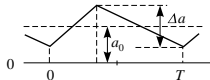
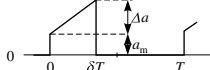
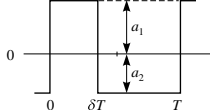
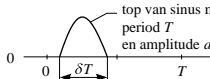
$$\int \mathbf{u} dt = \frac{\hat{U}}{j\omega} e^{j(\omega t + \vartheta)} = \frac{\mathbf{u}}{j\omega} = \frac{\mathbf{u}}{\omega} e^{-j\pi/2}$$

Tabel 8.2 Effectieve en gemiddelde waarden

golfvorm $a(t)$	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt}$	$A_{\text{gem}} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$
	$a_p$	$a_p$
	$\frac{a_p}{\sqrt{2}}$	0
	$\frac{a_p}{2}$	$\frac{a_p}{\pi}$
	$\frac{a_p}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\pi} a_p$
	$\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} a_p^2}$ $= a_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2} m^2}$	$a_0$
<p>halve sinus</p>	$a_p \sqrt{\frac{\delta}{2}} \quad (\delta < 1)$	$\frac{2}{\pi} \delta a_p$
	$a_p \sqrt{\delta} \quad (\delta < 1)$	$\delta a_p$
	$a_p \sqrt{\frac{\delta_1 + \delta_2}{3}}$	$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} a_p$



Tabel 8.2 (vervolg)

golfvorm $a(t)$	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt}$	$A_{\text{gem}} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$
	$a_p \sqrt{\frac{\delta}{3}}$	$\frac{\delta}{2} a_p$
	$a_p \sqrt{\frac{2\delta_1 + 3\delta_2}{3}}$	$(\delta_1 + \delta_2) a_p$
	$a_0 \sqrt{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2}$	$a_0$
	$\sqrt{\delta \left( a_m^2 + a_m \Delta a + \frac{(\Delta a)^2}{3} \right)}$	$\delta \left( a_m + \frac{\Delta a}{2} \right)$
	$\sqrt{\delta a_1^2 + (1 - \delta) a_2^2}$	$\delta a_1 - (1 - \delta) a_2$
 <p>top van sinus met period <math>T</math> en amplitude <math>a_p</math></p>	$a_p \sqrt{\frac{\delta}{2} + \frac{\sin 2\pi\delta}{4\pi}}$	$\frac{a_p}{\pi} \sin \pi\delta$

## Effectieve waarde van periodieke grootheid $a(t)$

$$\text{Definitie: } A (= A_{\text{eff}}) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)^2 d\omega t}$$

## Gemiddelde waarde van periodieke grootheid $a(t)$

$$\text{Definitie: } A_{\text{gem}} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t) d(\omega t)$$

## Vormfactor

$$\text{Definitie: } F = \frac{\text{effectieve waarde}}{\text{gemiddelde waarde}}$$

Voor sinusvormige spanning of stroom:

$$F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$$

## Vermogen

Werkzaam vermogen  $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$  ( $\cos \varphi =$  arbeidsfactor)

Schijnvermogen  $S = U \cdot I$

Blindvermogen  $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$

## Draaistroom

Sterschakeling  $U_1 = U_f \sqrt{3}$   $I_1 = I_f$

Driehoeschakeling  $U_1 = U_f$   $I_1 = I_f \sqrt{3}$

Vermogen  $P = 3U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi$

waarin:  $U_1 =$  lijnspanning,  $U_f =$  fasespanning

$I_1 =$  lijnstroom,  $I_f =$  fasestroom

## Ster/driehoek-transformatie

$R$  weerstanden.  $G$  geleidbaarheden.

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

$$G_{31} = \frac{G_1 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

## Driehoek/ster-transformatie

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

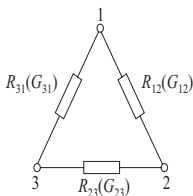
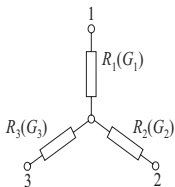
$$G_1 = G_1 + G_2 + \frac{G_1 \cdot G_2}{G_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$G_2 = G_2 + G_3 + \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$G_3 = G_1 + G_3 + \frac{G_1 \cdot G_3}{G_2}$$



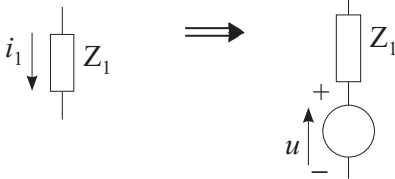
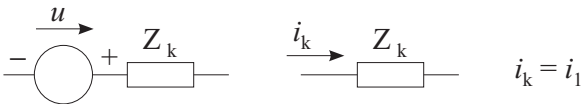
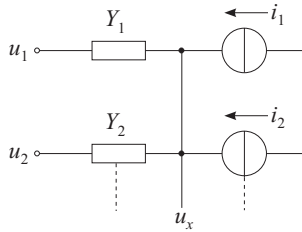
# Wetten en Theorema's

Eerste wet van Kirchhoff (stroomwet):  $\sum i(t) = 0$   
 ( $i(t)$  is positief naar het knooppunt)

Tweede wet van Kirchhoff (spanningswet)  $\sum u(t) = 0$   
 (rondgaand langs maas van netwerk;  $u(t)$  is zowel actief als passief)

## Superpositietheorema

$$u_x = \frac{\sum_i u_i Y_i + \sum_i i_i}{\sum_i Y_i}$$

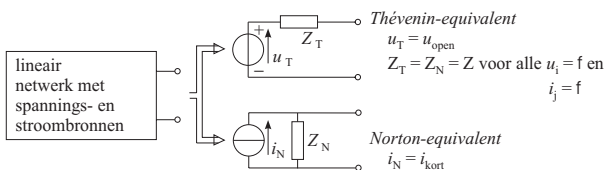


$i_1$  stroomt t.g.v.  $u$

$i_k$  stroomt t.g.v.  $u$

## Theorema's van Thévenin en Norton

Een linear netwerk kan worden vervangen door één spanningsbron (Thévenin) of één stroombron (Norton).



## 8.4 *Magnetostatica* (*uitwendige stromen = 0*)

1e Hoofdstelling: voor de magnetische veldsterkte, geïntegreerd langs een gesloten kromme  $s$  geldt:

$$\oint H_s \cdot ds = 0$$

2e Hoofdstelling: voor de magnetische inductie, geïntegreerd over een gesloten oppervlak  $A$  geldt:

$$\oiint B_n \cdot dA = 0$$

**Magnetische flux** door het oppervlak  $A$ :

$$\Phi_A = \int_A B_n \cdot dA \quad [\text{Wb}]$$

Voor homogeen veld:  $\Phi = B \cdot A$  als  $B \perp A$

**Magnetische inductie**  $B = \mu H$  [T]

$\mu = \mu_0 \mu_r$  = permeabiliteit

$\mu_r$  = relatieve permeabiliteit, zie [par. 9 Magnetisme](#)

Ook:  $B = \mu_0 H_u + J$  [T]

waarin:

$H_u$  = uitwendig aangelegde veldsterkte [A/m]

$J = B_i$  = magnetische polarisatie

$J = B - \mu_0 H_u = \mu_0 \kappa H_u = \mu_0 M$

$M = \kappa H_u$  = magnetisatie

$\kappa = \mu_r - 1$  = magnetische susceptibiliteit (ook  $\chi_m$ )

*Magnetisch moment (elektromagnetisch stroommoment)*

Een magneet heeft een *magnetisch moment*  $m$  als het koppel op die magneet in een veld met inductie  $B$ , even groot is als het koppel dat een winding met stroom  $I$  en oppervlak  $A$  in dat veld ondervindt:

$$m = A \cdot I \quad [\text{A} \cdot \text{m}^2]$$

(regel van Weber)

Magnetisch dipoolmoment:

$$j = \mu_0 \cdot m \quad [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{A}]$$

Kracht tussen twee magneetpolen:

$$F = \frac{\Phi_1 \Phi_2}{4\pi\mu r^2} \quad [\text{N}] \quad (\text{wet van Coulomb voor magneetpolen})$$

waarin:  $\Phi_1, \Phi_2$  = fluxen door polen 1 en 2 uitgezonden

$r$  = afstand tussen de puntvormige polen

$\mu$  = permeabiliteit van tussenliggende medium

Magnetostatische energie:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V H \cdot B \, dV \quad [\text{J}]$$

waarin:  $V$  = volume waar homogeen magnetisch veld heerst

## 8.5 Elektromagnetisch veld

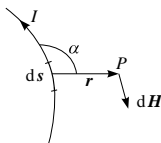
1e Hoofdstelling wordt nu (zie par. 8.4):

$$\oint H_s \cdot ds = \int_A J \cdot dA = \sum I \quad (\text{wet van Ampère})$$

Magnetisch veld ten gevolge van een stroom door een geleider:

$$dH = \frac{I \, ds}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

(Formule van Laplace)



Figuur 8.3 Stroomgeleider

$dH \perp$  vlak door  $ds$  en  $P$  in richting volgens *kurketrekkerregel* draaiend van  $I$  naar  $r$  (positief van  $ds$  naar  $P$ ). In vectorvorm:

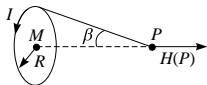
$$dH = \frac{I \, ds \times r}{4\pi r^3}$$

Voor oneindig *lange rechte geleider* geldt:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad [\text{A/m}] \quad (\text{wet van Biot en Savart})$$

Veldsterkte in het middelpunt van een *cirkelvormige geleider* (straal  $R$ ):

$$H(M) = \frac{I}{2R}$$



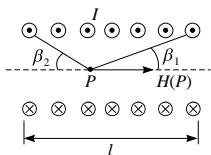
Veldsterkte buiten cirkelvormige geleider op as van de cirkel (fig. 8.4):

$$H(P) = \frac{I}{2R} \sin^3 \beta$$

Figuur 8.4  
Cirkelvormige geleider

Veldsterkte in een *korte spoel* met  $N$  windingen en lengte  $l$  (fig. 8.5):

$$H(P) = \frac{NI}{2l} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2)$$



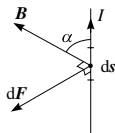
Figuur 8.5 Korte spoel

*Kracht op een stroomgeleider* in een magnetisch veld met inductie  $B$  (figuur 8.6):

$$dF = (I ds) \cdot B \cdot \sin \alpha$$

of  $d\mathbf{F} = I ds \times \mathbf{B}$

$d\mathbf{F} \perp I ds$  en  $\mathbf{B}$  (rechtscyclisch systeem)



Figuur 8.6 *Kracht op stroomgeleider*

Voor een *rechte stroomdraad* met lengte  $l \perp$  magnetisch veld  $B$  geldt de 'motorformule':

$$F = I \cdot l \cdot B \quad \text{of} \quad \mathbf{F} = (I \times \mathbf{B}) \cdot l$$

Kracht tussen twee evenwijdige rechte stroomgeleiders met lengte  $l$  op afstand  $r$ :

$$F = \mu \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l \quad [\text{N}]$$

*Lorentzkracht* = kracht op een bewegende lading  $q$  (snelheid  $v$ ) in een homogeen veld  $B$ :

$$F = B \cdot v \cdot q \cdot \sin \alpha \quad \text{of} \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad [\text{N}]$$

### **Inductiewet van Faraday**

Indien  $N$  windingen dezelfde flux  $\Phi$  omvatten is:

$$E_i = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad [\text{V}]$$

(minteken volgens *wet van Lenz*)

### **Zelfinductie $L$**

De *zelfinductie* van een spoel is de gekoppelde flux per eenheid van stroom:

$$L = \frac{\Sigma(N\Phi)}{I} = -\frac{1}{I} \int E \, dt \quad [\text{H}]$$

$$E_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Voor een zeer lange dunne *solenöide* en een dunne *toröide* (ringkern) is:

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$



Ringkern met luchtspleet (ijzer-weglengte  $l$ , luchtspleet  $d$ ):

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l/\mu_r + d} \approx \mu_0 \frac{N^2 A}{d}$$

Algemeen geldt:  $L = \frac{N^2}{R_m}$  waarin:  $R_m = \sum \frac{l}{\mu A}$

Wet van Hopkinson:

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} = \text{magnetische weerstand (= reluctantie)} \quad [\text{H}^{-1}]$$

$$U_m = NI = \text{magnetische spanning} \quad [\text{A}]$$

Energie in een spoel met zelfinductie  $L$ :

$$\text{Algemeen: } W_m = \frac{1}{2} \Phi(N \cdot I) = \frac{1}{2} \Phi \cdot U_m \quad [\text{J}]$$

$$w_m = \frac{1}{2} B \cdot H \quad [\text{J/m}^3]$$

$$\text{Constante } \mu: W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \quad [\text{J}]$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

### Mutuele inductie $M$

Tengevolge van een stroomverandering in een gekoppelde spoel wordt een spanning opgewekt:

$$E_2 = M \frac{dI_1}{dt} = \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

$M = \Phi_{21}/I_1 =$  gekoppelde flux per eenheid van stroom

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{waarin: } k = \text{koppelfactor}$$

## 8.6 Vergelijkingen van Maxwell

De vergelijkingen in integraal- en vectorvorm:

$$1 \quad \oint H_s \cdot ds = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{integratie langs gesloten kromme } s)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{wet van Maxwell})$$

waarin:  $H_s$  = component van  $H$  langs kromme  $s$   
 $I$  = door kromme omvatte stroom  
 $\Psi$  = door kromme omvatte elektrische flux

$$2 \oint E_s \cdot ds = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{integratie langs gesloten kromme } s)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{wet van Faraday})$$

waarin:  $E_s$  = component van  $E$  langs kromme  $s$   
 $\Phi$  = door kromme omvatte magnetische flux

$$3 \oiint D_n \cdot dA = Q = \int_V \rho \cdot dV \quad (\text{integratie over gesloten oppervlak } A)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{vrij}} \quad (\text{wet van Gauss voor elektrisch veld})$$

waarin:  $D_n$  = component  $D \perp$  oppervlak  $A$   
 $Q$  = elektrische lading binnen  $A$   
 $V$  = volume binnen  $A$   
 $\rho_{\text{vrij}}$  = dichtheid van de vrije ladingen binnen  $A$

$$4 \oiint B_n \cdot dA = 0 \quad (\text{integratie over gesloten oppervlak } A)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{wet van Gauss voor magnetisch veld})$$

waarin:  $B_n$  = component van  $B \perp$  oppervlak  $A$

*Poyntingvector* ( $\mathbf{S}$ ) wordt gedefinieerd volgens:

$$P = \frac{dW}{dt} = \oiint \mathbf{S}_n \cdot dA$$

$\mathbf{S}$  is het vectorproduct van  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{H}$ :  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

## 9 Magnetisme

Zie ook par. [8.4 Magnetostatica](#)

### 9.1 Typen magnetisme

*Diamagnetisme:*  $\mu_r$  iets kleiner dan 1, dus  $\kappa(\chi_m) < 0$   
de meeste stoffen zijn zwak diamagnetisch

*Paramagnetisme:*  $\mu_r$  iets groter dan 1, dus  $\kappa(\chi_m) > 0$ , maar  $\ll 1$   
paramagnetisch zijn o.a. oplossingen van ijzerzouten

*Ferromagnetisme:*  $\mu_r \gg 1$ , tot  $10^5$   
ferromagnetisch zijn ijzer, nikkel en cobalt en legeringen daarvan

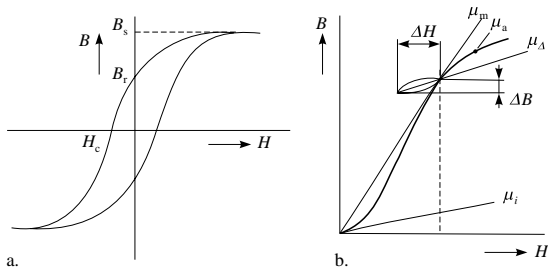
*Ferrimagnetisme:*  $\mu_r \gg 1$ , tot  $2$  à  $3 \cdot 10^3$   
ferrimagnetisch zijn de ferrieten, gebruikt in m.f. en h.f. techniek.

*Zacht-ferromagnetische materialen*, Mn-Zn en Ni-Zn ferrieten worden toegepast in transformatoren en smoorspoel-kernen.  
*Hard-ferromagnetische materialen* en *borium-ferriet* (*ferroxdur*) worden gebruikt in permanente magneten.

Voor magnetische eigenschappen, zie par. [Fysische gegevens](#), [tabel 1.21](#).

De *curie-temperatuur* ( $T_c$ ) is belangrijk bij ferro- en ferrimagnetische materialen. Bij overschrijding van  $T_c$  gedragen deze materialen zich paramagnetisch.

## 9.2 Hysteresislus



Figuur 9.1 (a) Hysteresislus of B-H-kromme, (b) maagdelijke kromme (aankromme) van ferromagnetisch materiaal

Symbolen in figuur 9.1:

$B_r$  = remanentie [T]

$B_s$  = verzadigingsinductie [T]

$H_c$  = coërcitiefkracht [A/m]

$\mu_a$  = amplitude-permeabiliteit

$\mu_i$  = initiële (aanvangs) permeabiliteit

$\mu_m$  = maximale permeabiliteit

$\mu_\Delta$  = incrementale permeabiliteit

$\mu_{\text{rev}}$  = reversibele permeabiliteit

$$\mu_a = \frac{B}{H}$$

$$\mu_i = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{B}{H}$$

$$\mu_\Delta = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

$$\mu_{\text{rev}} = \frac{dB}{dH} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \mu_\Delta$$

Meestal heeft  $\mu$  betrekking op een binnenlus.

**Hysteresisverliezen ( $P_h$ )**

Bij het doorlopen van de lus treden *verliezen* op, evenredig met de oppervlakte binnen de doorlopen kromme.

$P_h$  neemt toe met de frequentie en het kwadraat van de inductie.

Bij hoge frequenties moet rekening gehouden worden met een niet-lineair verband tussen  $B$  en  $H$ ;  $\mu$  moet dan complex genomen worden.

### 9.3 Permanente magneten

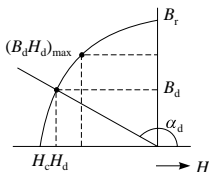
Een 'sterke' magneet moet een groot product  $(B_d H_d)_{\max}$  vertonen; hierin hebben  $B_d$  en  $H_d$  betrekking op de demagnetiseringskromme, zie figuur 9.2. Dit komt neer op grote waarden van  $B_r$  en  $H_c$ .

#### Staafmagneet

De zgn. *poolsterkte* van een staafmagneet wordt gekarakteriseerd door de flux die door beide polen wordt uitgezonden:

$$\Phi = \frac{j}{l_s} = \frac{\mu_0 m}{l_s} \quad [\text{Wb}]$$

waarin:  $l_s$  = lengte magneet [m]  
 $j$  = magnetisch dipoolmoment [Wb·m]  
 $m$  = magnetisch moment [A·m<sup>2</sup>]



Figuur 9.2  
Demagnetiseringskromme

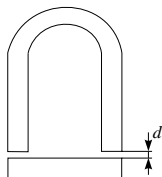
Zie ook par. 8.4 *Magnetostatica*.

**Hoefmagneet** met sluitstuk (figuur 9.3)

$$\frac{H_y}{H_1} = -\frac{2d}{l_y} \quad \text{en} \quad B_y = B_1$$

waarin:  $d$  = luchtspleetlengte  
 $l_y$  = totale ijzerlengte

Voor de getekende situatie komt de magneet in de toestand (zie figuur 9.2):



Figuur 9.3  
Hoefmagneet

$$\frac{B_d}{H_d} = -\mu_0 \frac{l}{2d} \sim \tan \alpha_d$$

Veldenergie in luchtspleet:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V_1 \quad [\text{J}]$$

waarin:  $V_1 =$  volume luchtspleet  $[\text{m}^3]$

Draagkracht van een magneet:

$$F = \frac{A}{2\mu_0} B^2 \quad [\text{N}]$$

waarin:  $A =$  doorsnede van de kern  $[\text{m}^2]$

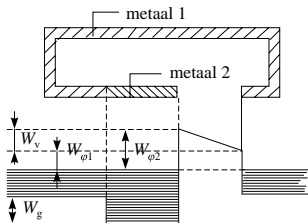
## 10 Contactpotentiaal, thermo-elektriciteit

### 10.1 Contactpotentiaal en volta-spanning

$W_\varphi =$  uittree-energie

$W_v = W_{\varphi 2} - W_{\varphi 1}$

$W_g =$  galvanie-energie



Figuur 10.1 Elektronenenergie bij contact tussen twee verschillende metalen

Contactpotentiaalverschil of galvani-spanning:

$$V_c = \frac{W_g}{e} \quad [\text{V}] \quad (\text{indien } W_g \text{ in joule})$$

$$V_c = W_g \quad [\text{V}] \quad (\text{indien } W_g \text{ in eV; } 1 \text{ eV} \approx 0,16 \times 10^{-18} \text{ J})$$

Volta-spanning:

$$V_v = W_v = W_{\varphi 2} - W_{\varphi 1} \quad [\text{V}]$$

Tabel 10.1 Waarden van de uittree-energie  $W_\varphi$  voor diverse metalen en halfgeleiders

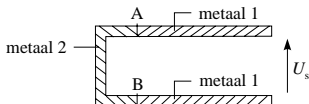
	$W_\varphi$ [eV]		$W_\varphi$ [eV]		$W_\varphi$ [eV]		$W_\varphi$ [eV]
Ag	4,70	Cd	4,04	Hg	4,53	Pt	5,42
Al	4,20	Ce	2,88	K	2,25	Sb	4,56
Au	4,71	Co	4,25	Li	2,46	Sc	4,87
B	4,60	Cs	1,94	Mg	3,70	Si	3,59
Ba	2,52	Cu	4,48	Mn	3,95	Sr	2,74
Be	3,92	Fe	4,63	Na	2,28	Ti	4,65
C	4,36	Ga	4,16	Ni	4,91	W	4,53
Ca	3,20	Ge	4,62	Pb	4,04	Zn	4,27

## 10.2 Thermo-elektriciteit

### Seebeck-effect

De contactpotentiaal is afhankelijk van de temperatuur. In het circuit van figuur 10.2 ontstaat een *thermo-elektrische spanning*  $U_s$  als er een temperatuurverschil tussen de plaatsen A en B bestaat. Bij benadering is:

$$U_s = V_{cA} - V_{cB}$$



Figuur 10.2 Seebeck-effect ( $T_A \neq T_B$ )

Tabel 10.2 geeft de *thermo-elektrische spanningsreeks* waarin metalen gerangschikt kunnen worden. In het circuit van figuur 10.2 geldt dan:

$$U_s = V_{T1} - V_{T2} \quad \text{voor} \quad T_A - T_B = 1^\circ\text{C}$$

Bij de warme contactplaats wordt dat metaal positief dat het hoogst in de reeks staat.

Tabel 10.2 *Thermo-elektrische spanningsreeks*

metaal	$V_T[\mu\text{V}]$	metaal	$V_T[\mu\text{V}]$	metaal	$V_T[\mu\text{V}]$
Te	570	Ag	77	Mg	74
Si	520	Zn	77	Al	74
Sb	120	Rh	76,5	Hg	70
Fe	88	Ir	76	Pt	70
W	78	manganine	76	Ni	55
Cu	77,5	Sn	74,5	Co	54
Au	77	Pb	74,5	constantaan	36
				Bi	0

*Thermokoppel = thermo-element* berust op Seebeck-effect. De meest gebruikte combinaties staan in tabel 10.3.

In de derde kolom staat de thermospanning voor  $\Delta T = 100\text{ K}$  met de koude las op  $273\text{ K}$ .

Tabel 10.3 *Meest gebruikte thermokoppels*

positief	negatief	temp. gebied [ $^\circ\text{C}$ ]	$U_{100}[\text{mV}]$
Cu	constantaan	- 200 tot + 400	4,28
Fe	constantaan	0 tot + 750	5,40
NiCr	Ni	0 tot + 1100	4,04
PtRh	Pt	tot + 1500	0,64
Pt	Ir	tot + 1500	0,65
W	Mo	tot + 1800	- 0,35 } minder stabil
C	SiC	tot + 2000	
Ir	IrRh	tot + 2300	



## Peltier-effect

Een stroom door een contactplaats van twee verschillende metalen of halfgeleiders veroorzaakt warmte-ontwikkeling of warmte-opname op die contactplaats:

$$W = \pi_{1,2} \cdot I \cdot t \quad [\text{J}]$$

waarin:  $\pi_{1,2}$  = peltier-coëfficiënt [J/C]

De peltier-coëfficiënt  $\pi_{1,2}$  is positief als de stroom van 1 naar 2 warmte-absorptie veroorzaakt; hij is negatief als bij die stroom warmte vrijkomt.

*Peltier-elementen* en *peltier-batterijen* worden het meest uitgevoerd met *N*- en *P*-versies van de halfgeleiders:

- bismut-telluride ( $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ).
- bismut-selenide ( $\text{Bi}_2\text{Se}_3$ ).
- antimoon-telluride ( $\text{Sb}_2\text{Te}_3$ ).
- loodtelluride ( $\text{PbTe}$ ).

*Tabel 3.2 Dampspanningstabel*

c <sub>s</sub> [g/m <sup>3</sup> ]	temp [°C]	verzadigde waterdampspanning p <sub>v</sub> [Pa]									
		.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
39,56	+35	5627	5657	5688	5720	5752	5784	5816	5848	5880	5912
37,54	34	5323	5352	5381	5412	5443	5472	5503	5533	5564	5595
35,62	33	5033	5061	5090	5118	5146	5176	5205	5234	5364	5293
33,77	32	4757	4785	4812	4838	4866	4893	4921	4949	4977	5005
32,02	31	4496	4521	4546	4573	4598	4625	4650	4677	4704	4730
30,34	30	4245	4270	4294	4319	4344	4369	4393	4418	4443	4469
28,73	29	4007	4031	4054	4078	4102	4125	4149	4173	4197	4221
27,21	28	3782	3803	3826	3848	3871	3893	3915	3939	3962	3984
25,75	27	3567	3588	3610	3630	3651	3674	3695	3716	3738	3760
24,36	26	3363	3383	3403	3423	3443	3463	3484	3504	3530	3546
23,05	25	3169	3188	3207	3226	3246	3264	3284	3303	3323	3343
21,78	24	2985	3003	3022	3040	3058	3076	3095	3114	3132	3151
20,55	23	2811	2828	2844	2861	2879	2896	2915	2932	2949	2967
19,43	22	2645	2661	2677	2693	2710	2727	2744	2760	2778	2793
18,35	21	2488	2504	2518	2535	2549	2565	2581	2597	2613	2629
17,28	20	2340	2353	2368	2382	2397	2412	2428	2442	2457	2473
16,30	19	2198	2212	2225	2240	2253	2268	2281	2296	2310	2325
15,37	18	2065	2077	2090	2104	2117	2130	2144	2157	2170	2184
14,47	17	1938	1950	1962	1978	1988	2001	2014	2026	2034	2052
13,65	16	1818	1830	1842	1854	1866	1878	1890	1902	1914	1926
12,85	15	1706	1717	1728	1739	1750	1761	1773	1784	1796	1808
12,07	14	1599	1609	1619	1630	1641	1651	1662	1673	1684	1696
11,35	13	1498	1507	1518	1527	1538	1547	1558	1569	1578	1589
10,65	12	1403	1413	1422	1431	1441	1450	1459	1469	1478	1489
10,01	11	1313	1321	1331	1339	1349	1358	1366	1375	1385	1394
9,40	10	1229	1237	1245	1253	1262	1270	1278	1287	1295	1305
8,82	9	1148	1156	1164	1172	1179	1187	1195	1203	1212	1220
8,27	8	1072	1080	1087	1095	1103	1110	1118	1126	1132	1140
7,76	7	1002	1008	1016	1023	1030	1036	1044	1051	1059	1066
7,28	6	935	942	948	955	962	968	975	982	988	995
6,83	5	872	879	884	891	898	903	910	916	923	928
6,40	4	814	819	826	831	836	843	848	855	860	867
5,99	3	758	763	768	775	780	786	791	796	802	808
5,59	2	706	711	716	722	727	732	736	742	747	752
5,21	1	657	661	667	671	676	681	685	691	696	701
4,84	+ 0	611	615	620	624	628	633	637	643	647	652
4,84	- 0	611	605	600	596	591	587	581	576	572	567
4,48	- 1	563	557	553	548	544	539	535	531	525	521
4,14	- 2	517	513	508	504	500	496	492	488	484	480
3,82	- 3	476	472	468	464	460	456	452	448	444	440
3,53	- 4	437	433	429	425	423	419	415	412	408	404
3,26	- 5	401	397	395	391	388	384	381	377	375	371
3,01	- 6	368	365	361	359	356	352	349	347	344	340
2,77	- 7	337	335	332	329	327	323	320	317	315	312
2,55	- 8	309	307	304	301	299	296	293	291	288	285
2,34	- 9	283	281	279	276	273	271	269	267	264	261
2,15	- 10	260	257	255	252	251	248	245	244	241	240
1,98	- 11	237	235	233	231	229	227	225	223	221	219
1,82	- 12	217	215	213	211	209	207	205	204	201	200
1,67	- 13	199	196	195	193	191	189	188	185	184	183
1,53	- 14	181	179	177	176	175	173	171	169	168	167
1,41	- 15	165	164	163	160	159	157	156	155	153	152
1,29	- 16	151	149	148	147	145	144	143	141	140	139
1,18	- 17	137	136	135	133	132	131	129	128	127	125
1,08	- 18	124	124	123	121	120	119	117	116	116	115
,99	- 19	113	112	111	111	109	108	107	105	105	104
0,90	- 20	103	101	101	100	98,7	98,7	97,4	96,0	94,7	94,7

# Fysische gegevens

Tabel 1.1 Compressibiliteit  $\kappa$  vloeistoffen [ $\text{Pa}^{-1}$ ] bij  $T = 293 \text{ K}$

water	$460 \times 10^{-12}$	olie	$550 - 800 \times 10^{-12}$
ethylalcohol	$990 \times 10^{-12}$	chloroform	$1000 - 1200 \times 10^{-12}$
kwik	$37 \times 10^{-12}$	glycerol	$370 \times 10^{-12}$

Tabel 1.2 Dynamische viscositeit  $\eta$  [ $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ] (zie ook [tabel 1.3](#))

	$t$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\eta$		$t$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\eta$
alcohol	0	$1,84 \times 10^{-3}$	machineolie	10	0,676
alcohol	19	$1,21 \times 10^{-3}$	machineolie	44	0,071
azijnzuur	20	$1,23 \times 10^{-3}$	kwik	20	$1,59 \times 10^{-3}$
azijnzuur	57	$0,73 \times 10^{-3}$	tolueen	0	$0,77 \times 10^{-3}$
benzeen	20	$0,64 \times 10^{-3}$	water	0	$1,8 \times 10^{-3}$
benzeen	60	$0,39 \times 10^{-3}$	water	20	$1,0 \times 10^{-3}$
glycerol	3	4,22	water	50	$0,5 \times 10^{-3}$
glycerol	21	0,778			

Tabel 1.3  
Vloeistoffen

	1 Dichtheid $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] <sup>1)</sup>	2 Oppervlaktespanning $\sigma$ [N/m] <sup>1)</sup>	3 Dynamische viscositeit $\eta$ [Pa·s] <sup>1)</sup> Zie ook tabel 1.2	4 Kubieke uitzetings- coëfficiënt $\gamma$ [K <sup>-1</sup> ] ( $T = 293 - 373$ K)	5 Soortelijke warmte $c$ [J/(kg·K)] ( $T = 293 - 373$ K)	6 Warmtegeleidings- coëfficiënt $\lambda$ [W/(m·K)] <sup>1)</sup>	7 Smeltpunt [K] ( $p = p_n$ )	8 Soortelijke smelt- warmte [J/kg]	9 Kookpunt [K] ( $p = p_n$ )	10 Soortelijke verdamingswarmte [J/kg]	11 Kritische temp. [K]	12 Kritische druk [Pa]
	$\times 10^3$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^3$			$\times 10^3$		$\times 10^3$		$\times 10^6$
aceton	0,79	23	0,33	1,5	2,20	0,16	178	92	329	515	509	6,1
alcohol	0,80	22	1,2	1,1	2,43	0,17	159	105	351	841	516	6,2
aniline	1,02	43	4,4	0,84	2,05	0,17	267	88	457	435	699	5,1
benzeen	0,88	29	0,65	1,2	1,71	0,15	279	127	353	393	563	4,6
benzine	0,72			1,0	2,1		123					
chloroform	1,49	27	0,6	1,3	0,96	0,12	210	244	335	250	535	5,5
ether	0,71	17	0,23	1,7	2,30	0,14	157	115	308	377	467	3,3
glycerol	1,26	62	1500	0,5	2,43	0,29	292	175	563	83	725	
koolstofdисульфide	1,26	32	0,36	1,2	1,00	0,14	161	57	319	350	552	7,5
kwik	13,5 <sup>2)</sup>	500	1,55	0,182	0,14	10,4	234	12	630	301	1720	100
melk	1,02-1,04	45	2,1	0,8 <sup>3)</sup>	3,9	0,49	272,5	92	373			
methanol	0,79	23	0,60	1,2	2,50	0,21	175	145	338	1110	513	7,8
olijfolie	0,92	33	84	0,72	1,65	0,17			570			
petroleum	0,79	27		1,0	2,1	0,15	203		423	319		
siliconenolie	0,76	16	0,49	1,6	1,37	0,10	205		373			
spiritus (95%)	0,85						183		351			
stookolie	0,95											
terpentijn	0,84	27	1,5	0,97	1,75	0,15	263		453	293	649	7,9
tetra	1,59	26	0,97		0,84	0,10	250	17	350	193	556	4,4
water	0,998	73	1,00	0,21 <sup>4)</sup>	4,18	0,60	273	334	373	2260	647	22,1
zeewater <sup>5)</sup>	1,024		1,01		3,93	0,60	270	334		2260		
zwaar water	1,105				4,22	0,58	277	318	374	2070	645	21,7
zwavelzuur	1,84	55	28	0,56	1,38		284		603	511		

1)  $T = 293$  K

2) 13,6 bij 273 K

3) 273–333 K

4) 293 K

5) 3% zout

$p_n = 101325$  Pa (= 1 atm)

Tabel 1.4  
Gas  
en  
dampen

	1 Dichtheid $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] ( $p = p_a$ )	2 Dynamische viscositeit $\eta$ [Pa·s] <sup>1)</sup>	3 Soort. warmte bij const. druk $c_p$ [kJ/(kg·K)] <sup>2)</sup>	4 $\gamma = c_p/c_v$ <sup>3)</sup>	5 Warmtegeleid- coëfficiënt $\lambda$ [W/(m·K)] <sup>4)</sup>	6 Smeltpunt [K] ( $p = p_a$ )	7 Kooppunt [K] ( $p = p_a$ )	8 Soortelijke verdampings- warmte [J/kg]	9 Kritische temp. [K]	10 Kritische druk [Pa]	11 Inverse temperatuur [K]	12 Temperatuur trippunt [K]	13 Druk trippunt [Pa]
aardgas (Gronings)	0,833	$\times 10^{-6}$ 11	$\times 10^3$ 1,9	1,31	29			$\times 10^3$	187 <sup>2)</sup>	$\times 10^6$ 4,5 <sup>2)</sup>			$\times 10^3$
acetyleen (ethyn)	1,18	10	1,67	1,25	19		190 <sup>6)</sup>		309	6,3			
alcohol damp		10,8 <sup>3)</sup>				159	351	841	516	6,2			
ammoniak	0,77	9,2	2,06	1,32	22	195	240	1370	405	11,9		195	6,07
argon	1,78	21	0,52	1,66	16	84	87	160	151	4,9	780	83,8	68,8
butaan (iso-)	2,67	6,9	1,61	1,11	14	128	263	408	3,6				
chloor	3,21	16,8 <sup>3)</sup>	0,49	1,36	7,6	172	239	290	417	6,4			
chloroform- damp		9,4	0,60	1,15 <sup>3)</sup>		210	335	240	535	5,5			
deuterium	0,180			1,73		18	23	310	38	1,7		18,6	17,07
ethaan	1,36	8,5	1,72	1,22	18	90	185	490	241	4,9			
etheen	1,26	9,4	1,41	1,25	17			490	283	5,1			
etherdamp		6,8	2,0	1,09		157	308	377	467	3,3			
fluor	1,70					53	85	170	144	5,7			
freon-12	5,51	12	0,06	1,14	8,5	123	243	243	385	4,1			
helium	0,178	18,6	5,1	1,66	144	1,0 <sup>5)</sup>	4,3	21	5,2	0,23	50	2,19	5,1
koolstof- dioxide	1,98	13,9	0,82	1,31	14	195 <sup>6)</sup>		570	304	7,3	2052	216,6	517
koolstof- monoxide	1,25	16,6	1,05	1,40	23	68	82	210	134	3,6			
krypton	3,74	23,3	0,25	1,69	8,7	116	120	110	210	5,5	1090	115,8	73,5
kwikdamp		50 <sup>4)</sup>		1,67 <sup>4)</sup>		234	630	301	1720	100			
lucht	1,29	17,1	1,00	1,40	24	60 <sup>2)</sup>	80 <sup>2)</sup>	210 <sup>2)</sup>	132 <sup>2)</sup>	3,8 <sup>2)</sup>	659 <sup>2)</sup>		
methaan	0,72	10,2	2,21	1,31	30	91	112	510	190	4,6	968	90,7	11,7
neon	0,90	29,7	1,03	1,64	46	25	27	130	44	2,7	231	24,6	43,2
ozon	2,22		0,79	1,40		81	163	250	268	7,0			
propaan	2,02	7,6	1,53	1,13	15	85	231	430	370	4,2			
stikstof	1,25	17	1,04	1,40	24	63	77	200	126	3,3	621	63,2	12,54
waterdamp	0,598 <sup>3)</sup>	12,5 <sup>3)</sup>	2,0	1,33 <sup>3)</sup>	16	273	373	2260	647	22,1	4367	273,16	0,6112
waterstof	0,090	8,4	14,3	1,41	174	14	20	450	33	2,0	193	13,84	7,04
xenon	5,9	21,0		1,67	5,2	161	165	100	290	5,8	1456	161,4	81,7
zuurstof	1,43	18,9	0,92	1,40	25	54	90	210	154	5,1	764	54,36	0,152
zwavel- dioxide	2,93	11,6	0,64	1,27	8,4	198	263	390	431	7,8		197,7	0,167

1)  $T = 273$  K

2) gewogen gemiddelde: eigenlijk traject

3) bij 373 K

4) bij 550 K

5) bij  $2,5 \cdot 10^6$  Pa

6) bij  $p = p_a$ , rechtstreekse overgang vast-gas  
 $p_a = 101325$  Pa (= 1 atm)

Tabel 1.5  
Metalen

	1 Dichtheid $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] <sup>1)</sup> ( $\rho = \rho_0$ )	2 Elastische- modulus $E$ [Pa] <sup>1)</sup>	3 Lineaire uitz. coëff. $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ] ( $T = 273-373$ K)	4 Soortelijke warmte $c$ [J/(kg·K)] <sup>1)</sup>	5 Warmtegeleid coëfficiënt $\lambda$ [W/(m·K)] <sup>1)</sup>	6 Smeltpunt [K] ( $p = p_0$ )	7 Soortelijke smeltwarmte [J/kg]	8 Soortelijke weerstand $\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ] <sup>1)</sup>	9 Weerstands- temperatuur coëfficiënt $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]
	$\times 10^3$	$\times 10^9$	$\times 10^{-6}$	$\times 10^3$			$\times 10^3$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-3}$
aluminium	2,70	70	23,2	0,88 <sup>4)</sup>	237	932	400	27	3,8/4,4
beryllium	1,85	300	11,5	1,78	170	1551	1384	33	9,0
bismut	9,80	32	13,5	0,12	9	544	54	1164	4,3
cadmium	8,65	60	31,5	0,234	92	594	57	75	4,0
calcium	1,55	20	22,3	0,65	96	1112	330	43	4,2
chrom	7,19	25	7,0	0,45	87	2160	280	130	3
goud	19,32	80	14,0	0,13	310	1336	66	24	3,9
kalium	0,87		83	0,754	103	336	65	72	5,4
kobalt	8,85	210	13,7	0,42	70	1768	260	58	6,0
koper (zacht/hard)	8,96	124	16,8	0,39 <sup>4)</sup>	390	1356	205	16,7/67,5	3,9/4,3
kwik	13,5 <sup>2)</sup>		182 <sup>3)</sup>	0,14	8,4	234	12	960	0,93
lood	11,36	15	28,9	0,13 <sup>4)</sup>	35	601	25	210	4,1
magnesium	1,74	44	25,6	1,03	150	923	370	46	3,8
molybdeen	10,22	330	5	0,26	138	2890	290	52	4,3
natrium	0,97		69,6	1,25	132	371	115	47	5,5
nikkel	8,89	196	12,7	0,46	92	1726	310	70	4,7
platina	21,45	165	8,9	0,133	72	2043	110	106	3,9
tantaal	16,60	190	6,5	0,14	54	3270	170	133	3,1
tin wit tetragonaal	7,30	55	22	0,22 <sup>4)</sup>	63	505	59	115	4,3
wit rombisch	6,54		17			505			
grijs	5,75		35			505	40		
titaan	4,51	115	8,7	0,47	22	1940		430	
uraan	19,07	130	15	0,116	27	1406	40	290	2,1
vanadium	6,10			0,48	31	2193		357	
wolfram	19,30	360	4,5	0,135	170	3680	190	55	4,9
ijzer	7,87	220	11,7	0,46 <sup>4)</sup>	79	1812	276	98	6,5
zilver	10,50	77	19,2	0,24 <sup>4)</sup>	417	1234	105	16,1	3,9
zink	7,14	93	29,7	0,39	116	693	107	59	4,1

<sup>1)</sup>  $T = 293$  K

<sup>2)</sup> 13,6 bij  $T = 273$  K

<sup>3)</sup> kubieke uitzettingscoëfficiënt

$p_0 = 101325$  Pa (= 1 atm)

<sup>4)</sup> bij  $T = 2000$  K: aluminium  $1,1 \cdot 10^{-3}$ ; koper  $0,50 \cdot 10^{-3}$ ; lood  $0,14 \cdot 10^{-3}$ ; tin  $0,24 \cdot 10^{-3}$ ; ijzer  $0,82 \cdot 10^{-3}$ ; zilver  $0,28 \cdot 10^{-3}$

**Tabel 1.6**  
**Legeringen**

Samenstelling	1 Dichtheid $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] <sup>1)</sup>	2 Elasticiteits- modulus $E$ [Pa] <sup>1)</sup>	3 Lineaire uitz. coëff. $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ] ( $T = 273 - 373$ K)	4 Soortelijke warme $c$ [J/(kg·K)] <sup>1)</sup>	5 Warmtegeleid coëfficiënt $\lambda$ [W/(m·K)] <sup>1)</sup>	6 Smeltpunt K ( $p = p_n$ )	7 Soortelijke weerstand $\rho$ [ $\Omega \cdot m$ ] <sup>1)</sup>	8 Weerstands- temperatuur coëfficiënt $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]
massa %	$\times 10^3$	$\times 10^9$	$\times 10^{-6}$				$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-3}$
alumel	95% Ni, 1% Si, 2% Al, 2% Mn	8,7			30		330	2,4
brons	92% Cu, 8% Sn	8,9	100	19	380	1280	140	0,6
chromel A	80% Ni, 20% Cr	8,4		17	18	1673	113	0,1
constantaan	54% Cu, 45% Ni, 1% Mn	8,9	110	15	410	1540	490	0,02
duraluminium	95% Al, 4% Cu	2,8	71	23	920	160	652	
gietijzer	94% Fe, 3-4% C, 2,5% Si	7,3	100	11,5	500	60	1450	100
invar	64% Fe, 36% Ni	8,1	145	1-2	500	16	1700	80
manganine	84% Cu, 12% Mn, 4% Ni	8,5	130	16	410	22	1270	440
messing	55-70% Cu, 30-45% Zn	8,5	100	21	380	122	1170	66
nichroom	60% Ni, 18% Cr, 22% Fe	8,2		13	13	1620	112	0,13
nieuw zilver	45-70% Cu,	8,9	110	18	400	33	1375	330
(duits zilver)	5-30% Ni, 8-45% Zn							
novocostant	82% Cu, 12% Mn, 4% Al, 2% Fe	8,8					450	
soldeer (zacht)	50% Pb, 50% Sn	9,0	0,045	23	176	80	490	150
staal:								
koolstofstaal	99% Fe, 0,8% C	7,8	200	12	480	50	1630	180
magneetstaal (alnico)	62% Fe, 20% Ni, 12% Al	6,9	200					
roestvast staal (messenstaal)	85% Fe, 0,2% C, 13% Cr	7,8	200	10	460	27	1780	720
RVS 302	70% Fe, 18% Cr, 8% Ni	7,9	200	17	500	16	1690	765
Woods' metaal	44,5% Bi, 35,5% Pb, 10% Cd, 10% Sn	9,7			150	13	344	0,2

<sup>1)</sup>  $T = 293$  K

$p_n = 101325$  Pa (= 1 atm)

**Tabel 1.7**  
**Diverse**  
**vaste stoffen**

	1 Dichtheid $\rho$ [kg·m <sup>-3</sup> ] <sup>1)</sup>	2 Elastische- modulus $E$ [Pa] <sup>1)</sup>	3 Lineaire uitzettings- coëfficiënt $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ] (273 – 373 K)	4 Soortelijke warmte $c$ [J/(kg·K)] <sup>1)</sup>	5 Warmtegeleidings- coëfficiënt $\lambda$ [W/(m·K)] <sup>1)</sup>	6 Smeltpunt $K$ ( $p = p_n$ )	7 Soortelijke smeltwarmte [J/kg]	8 Max. toelaatbare temperatuur [K]	9 Soortelijke- weerstand $\rho$ [Ω·m]
	$\times 10^3$	$\times 10^9$	$\times 10^{-6}$	$\times 10^3$			$\times 10^6$		
akryl	1,2		70–100	1,4–2,1	0,2			$10^{19}$	
asfalt	1,2		200	0,92	0,6				
bakeliet	1,3	6–10	30	0,92	0,2			$10^5$ – $10^9$	
barnsteen	1,0		54		0,13				
basalt	2,7–3,2			0,84–0,92	1				
been (bot)	1,9	0,014							
beton	1,5–2,4	20–40	10–12	0,9–1,1	0,2–20				
bruinsteen	3,4			0,73					
boter	0,86–0,87								
calciet	2,7								
diamant	3,52		1,3	0,49	165	> 3800	17	$10^{13}$	
eboniet	1,15		80–85	1,67	0,17			$10^8$	
fosfor (wit)	1,83		124	0,79		317	0,022	$10^{17}$	
(rood)	2,20								
germanium	5,46		6,1	0,31	63	1210	0,44	0,59	
gips	2,32		25	0,8–1,1	1,3				
glas gewoon	2,6	50–100	8–9	0,84	0,93	1000		$10^{12}$	
flint	3,1–3,9	60–80	8	0,5	0,8				
grafiet	2,25		1–2	0,69–0,72	160	3823	17	$10^{-5}$	
graniet	2,6–2,7		7–8	0,82	3,5				
hout balsa-	0,15		5–50		0,1				
ebbe-	1,26		3–5		0,3–0,5				
eike	0,78	11	3–5	2,4	0,3–0,5				
vure-	0,58	10–20	5	2,7	0,3–0,5			$10^{12}$	
ivoor	1,9				0,6–1,2				
kamfer	0,99					453			
keukenzout	2,17		40	0,88	0,045–0,06	1081	0,5		
koolstof	3,5		28	0,85				$10^4$	
kurk	0,20–0,35			17–21	0,05–0,11			$10^8$	
kwarts	2,2–2,5	70	0,4	0,75	0,22	1880	0,2	$10^{20}$	
marmar	2,7	40–50	12	0,88	2–4			$10^9$	
mica	2,8	140–210	3	0,88	0,4–0,6			$10^{14}$	
naftaleen	1,15		94	1,3		353	0,151	$3 \cdot 10^5$	
nylon 6	1,14	1–2,5	100–140	1,7	0,2–0,3	215–220		> $10^{14}$	
papier	0,7–1,2				0,18			$10^{10}$	
paraffine	0,85		100–200	2,1–2,9	0,21–0,26	325–329	0,147	$10^{15}$	
PMMA (plexiglas (perspex))	1,2	2,5–3,5	80	1,5	1,9			> $10^{19}$	
polyethleen (PE)	0,93	0,5	180	2,2	0,23–0,29	398		$3 \cdot 10^{15}$	
polystyreen	1,06	2,5–3	70	1,3	0,08			> $10^{14}$	
porselein	2,4	70–80	2–5	0,8	1,0–1,7	1900		$10^{12}$	
PVC-hard	1,3	2,5–3,5	150–250	1,0–2,0	0,16			$10^{12}$ – $10^{14}$	
rubber	1,2–1,6	$10^{-3}$ – $10^{-4}$	200	1,1–2,0	0,15			$10^{13}$	
seleen	4,82		39	0,35		490	0,066	$10^7$	
silicium	2,33	100–110	4,2	0,76	80–150	1683	0,164	625	
steen (klinker)	1,5–2,0		3–9	0,75	0,6–1,1				
suiker (sacharose)	1,6		80	1,2		458	0,056		
teflon (PTFE)	2,2		90	1,0	0,2–0,3	327		$10^{20}$	
was	0,95	1,8		2,5		338			
ijs (269 K)	0,917	3	50	2,2	2,1	273	0,334		
zand (droog)	1,6			0,80	1				
zwavel rombisch	2,07		61	0,73	0,2		0,038		
monoklien	1,96		80	0,74	0,2	392	0,046	$10^{23}$	

<sup>1)</sup>T = 293 K

$p_n = 101\,325\text{ Pa} (= 1\text{ atm})$

Voor kunststoffen zie ook par. 3.1.



Tabel 1.8 Verzadigingsdrukken [Pa]

T[K]	kwik	benzeen	alcohol	ether	water
		$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^5$	
273	$2,47 \cdot 10^{-2}$	3,47	1,67	0,247	zie hfd. F4, par. 3.1, tabel 3.1
283	$6,53 \cdot 10^{-2}$				
293	$1,60 \cdot 10^{-1}$	10,0	5,38	0,587	
303	$3,70 \cdot 10^{-1}$				
313	$8,10 \cdot 10^{-1}$	24,3	17,8	1,23	
323	1,69				
333	3,36	51,9	46,8	2,32	
343	6,44				
353	$1,18 \cdot 10^1$	101	108	4,00	
363	$2,11 \cdot 10^1$				
373	$3,64 \cdot 10^1$	179	225	6,54	
423	$3,74 \cdot 10^2$				
473	$2,30 \cdot 10^3$	1700	1800		
523	$9,92 \cdot 10^3$				

Tabel 1.9 Diffusiecoëfficiënten

mengsel (A–B)	temperatuur [K]	$D_{AB}^0$ [m <sup>2</sup> /s]
<b>gassen</b>		
waterdamp-lucht	293	25,6 $\times 10^{-6}$
methanol-lucht	293	16 $\times 10^{-6}$
propionzuur-lucht	293	9,9 $\times 10^{-6}$
butylamine-lucht	293	10,1 $\times 10^{-6}$
CO <sub>2</sub> -lucht	293	16,4 $\times 10^{-6}$
H <sub>2</sub> -lucht	293	41 $\times 10^{-6}$
<b>vloeistoffen</b>		
H <sub>2</sub> -water	293	5,0 $\times 10^{-9}$
H <sub>2</sub> -sojaboonolie	293	2,4 $\times 10^{-9}$
CO <sub>2</sub> -water	293	1,77 $\times 10^{-9}$
glucose-water	293	0,60 $\times 10^{-9}$
lactose-water	293	0,43 $\times 10^{-9}$
sucrose-water	293	0,45 $\times 10^{-9}$
ethanol-water	298	1,13 $\times 10^{-9}$
water-aardnotenolie	298	0,25 $\times 10^{-9}$

Tabel 1.10 Kook- en sublimatiepunten<sup>1)</sup> [K]

	druk [Pa]											
	133,3	1,333 × 10 <sup>3</sup>	5,33 × 10 <sup>3</sup>	13,33 × 10 <sup>3</sup>	53,3 × 10 <sup>3</sup>	101,3 × 10 <sup>3</sup>	202,6 × 10 <sup>3</sup>	507 × 10 <sup>3</sup>	1,013 × 10 <sup>6</sup>	2,026 × 10 <sup>6</sup>	4,05 × 10 <sup>6</sup>	6,08 × 10 <sup>6</sup>
alcohol	242	271	292	308	337	351	371	399	425	456	491	515
ammoniak	<b>164</b>	<b>181</b>	<b>194</b>	205	228	240	254	278	299	323	352	371
benzeen	<b>236</b>	<b>262</b>	281	299	334	353	377	416	452	495	545	
chloor	<b>155</b>	<b>171</b>	189	201	226	239	254	283	309	338	375	400
chloormethaan		181	197	210	235	249	267	295	320	350	387	411
ethaan	114	130	143	154	173	185	198	220	241	267	297	
ether	199	225	245	262	291	308	329	363	395	432		
fenol	313	347	373	394	433	455	481	521	557	602	655	692
glycerol	399	440	471	493	536	563						
grafiet	<b>3860</b>	<b>4220</b>	<b>4470</b>	<b>4650</b>	<b>4930</b>	<b>5100</b>						
helium	1,4	1,8	2,4	2,8	3,8	4,3	5,1					
jood	<b>312</b>	<b>346</b>	<b>371</b>	390	433	456						
koolstofdioxide	<b>139</b>	<b>154</b>	<b>165</b>	<b>173</b>	<b>187</b>	<b>195</b>	<b>204</b>	216	234	254	279	296
koolstofdисульфide	199	228	251	268	301	319	342	378	409	449	496	529
koolstofmonoxide	<b>51</b>	<b>58</b>	<b>63</b>	<b>67</b>	77	82	90	102	112	121		
koper	1901	2152	2340	2480	2740	2855						
kwik	399	457	501	535	596	630						
lood	1246	1435	1582	1694	1903	2024						
methaan	67	78	85	92	104	112	121	135	148	165	187	
methanol	229	257	278	294	323	338	357	386	411	441	477	497
stikstof	47	54	59	63	72	77	84	94	103	115		
water	<b>256</b>	284	307	325	356	373	393	425	454	486	524	550
waterstof	10	12	14	16	18	20	23	27	31			
waterstofchloride	<b>122</b>	<b>137</b>	<b>149</b>	159	178	188	202	223	241	264	291	309
zuurstof	54	63	69	74	84	90	97	109	120	133	149	
zwavel	457	517	561	600	673	718						

<sup>1)</sup> De sublimatiepunten zijn vet gedrukt. 133,3 Pa = 1 mm Hg; 5,33 × 10<sup>3</sup> Pa = 40 mm Hg; 101,3 × 10<sup>3</sup> Pa = 1 atm

*Tabel 1.13 Warmte-overdrachtscoëfficiënten  $\alpha$  [W/(m<sup>2</sup>·K)]*

---

	$\alpha$
gas (vrije convectie)	5–15
gas (gedwongen convectie)	10–100
vloeistof (vrije convectie)	50–1000
vloeistof (gedwongen convectie)	500–3000
water in rust	350–580
water (geforceerde stroming)	580–2300
condenserend water	11600
condenserend ammoniak	9300
condenserend R <sub>12</sub> , R <sub>22</sub>	2300

---

Tabel 1.14 Prandtl-getallen  $Pr$  (bij  $20^{\circ}\text{C}$ , 1 atm)

	$Pr$		$Pr$
lucht, $\text{H}_2$ , $\text{N}_2$	ca. 0,7	stoom ( $100^{\circ}\text{C}$ )	1,12
benzeen	7,36	water ( $0^{\circ}\text{C}$ )	13,7
glycerol	$12,4 \cdot 10^3$	water ( $20^{\circ}\text{C}$ )	7,03
kwik	0,023	water ( $100^{\circ}\text{C}$ )	1,74

Tabel 1.15 Wandoneffenheden bij buizen

materiaal	toelichting	wandoneffenheden [mm]
glas		0,01
PVC, polyetheen polyvinylchloride		0,01
beton	gladde bekisting	0,1 – 1
	delen bekisting	1 – 3
metselwerk	onbewerkt	2 – 5
	gepleisterd	0,2 – 0,5
gietijzer	nieuw onbehandeld	0,25
	geroest	1 – 1,5
	geasfalteerd	0,02–0,01
staal	nieuw onbehandeld	0,05–0,1
	egaal geroest	0,1 – 0,4
	geasfalteerd	0,02–0,1
messing	getrokken	0,02
hout	geschaafd	0,2 – 0,5
	ruw	0,5 – 2

Tabel 1.16 Voortplantingssnelheden geluid [m/s]

vaste stof <sup>1)</sup>	$T = 293 \text{ K}$	vloeistof	$T = 293 \text{ K}$	gas/damp	$T = 273 \text{ K}$
aluminium	5100	aceton	1190	ammoniak	415
been (massief)	3000	alcohol	1170	argon	308
(poreus)	2600	aniline	1660	chloor	206
beton	4300	benzeen	1320	chloroform (360 K)	171
glas	4000–4500	chloroform	990	deuterium	890
graniet	4000	glycerol	1930	ether (360 K)	206
hout	1500–4000	koolstofdissulfide	1170	helium	965
ivoor	3000	kwik	1450	koolstofdioxide	259
koper	3800	methanol	1120	koolstofmonoxide	338
kurk	500	olie	1500	lucht (233 K)	307
lood	1200	siliconenolie	790	(253 K)	319
marmer	3800	terpentijn	1220	(273 K)	332
paraffine	1300	water (273 K)	1403	(293 K)	343
polyetheen	920	(293 K)	1484	(313 K)	354
rubber	50	(313 K)	1529	(333 K)	365
staal	5100	(333 K)	1540	methaan	430
steen	3600	(353 K)	1555	neon	435
ijs (269 K)	3280	(373 K)	1543	stikstof	334
ijzer	5100	zeewater	1510	waterdamp (407 K)	494
zilver	2700	zwaar water	1380	waterstof	1284
zink	3800			zuurstof	316
				zwaveldioxide	213

<sup>1)</sup> Bij metalen gelden de getallen voor *dunne staven* (zie ook hoofdstuk *Natuurkunde*, par. 6.2).

Tabel 1.17 Brekingsindices

stof	brekingsindex				grenshoek in graden 589 nm (geel)	door- latings- gebied [ $\mu\text{m}$ ]
	687 nm (rood)	589 nm (geel)	486 nm (blauw)	434 nm (violet)		
<b>vaste stoffen</b> (t.o.v. lucht, $T = 293 \text{ K}$ )						
calciumfluoride (fluoriet)	1,43	1,43			44,4	0,125–9
canadabalsem		1,53			41	
diamant		2,42			24,4	
flintglas (licht)	1,507	1,510	1,516	1,522	41,5	
(zwaar)	1,64	1,65	1,66	1,67	37,3	
(zeer zwaar)	1,88	1,89	1,92	1,94	32,0	
kaliomchloride	1,48	1,49	1,51	1,52	42,2	0,2–24
kalkspaat						
(gewone straal)	1,65	1,66	1,67	1,68	37,3	0,2–2
(buitengewone straal)	1,48	1,49	1,49	1,49	42,2	0,2–2
keukenzout		1,54			40,5	0,2–15
kiezelaarde	1,46	1,46	1,46	1,47	43,2	0,2–3,5
kroonglas (licht)	1,51	1,51	1,52	1,52	41,5	
(zwaar)	1,61	1,61	1,62	1,62	38,4	
kwarts						
(gewone straal)	1,54	1,54	1,55	1,55	40,5	– 7
(buitengewone straal)	1,55	1,55	1,56	1,56	40,2	
natriumjodide		1,77			34,4	
PMMA (plexiglas/perspex)	1,49	1,49	1,50	1,50	42,2	0,34–2
polycarbonaat (pc)	1,59					
polystyreen	1,58	1,59	1,60	1,62	39,0	0,34–2
steenzout	1,538	1,541	1,553	1,56	40,5	– 19
topaas		1,61			38,4	
ijs (273 K)		1,31			49,8	
<b>vloeistoffen</b> (t.o.v. lucht, $T = 293 \text{ K}$ )						
aceton		1,359			47,4	
benzeen	1,494	1,501	1,513	1,520	41,8	
ehtanol	1,36	1,362	1,366	1,371	47,2	
ether	1,350	1,353	1,375	1,361	47,7	
fosfor in koolstofdisulfide		$\geq 1,95$			$\leq 31$	
glycerol	1,466	1,47	1,475	1,480	42,9	
keukenzoutoplossing (1 molair)		1,38			46,4	
koolstofdisulfide	1,615	1,628	1,652	1,677	38	
paraffine		1,48			42,5	
terpentijn		1,472			42,8	
tetra		1,466			43,0	
water	1,330	1,333	1,337	1,341	48,6	
<b>gassen</b> ( $T = 273 \text{ K}$ , $p = p_n = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$ )						
helium		1,000035				
lucht		1,00029				
zuurstof		1,00027				
zwaveldioxide		1,00069				

*Tabel 1.18 Relatieve diëlektrische constanten  $\epsilon_r$*

**vaste stoffen** ( $T = 298 \text{ K}$ )

asfalt	2,7	mica	6–7
bakeliet	4,5	nylon	3,5
calciet	8,0–8,5	papier	2,2
diamant	5,5	paraffine	2,2
eboniet	2,7–2,9	PMMA (plexiglas/perspex) <sup>1)</sup>	3–3,5
fosfor (rood)	4,1	polystyreen	2,55
(wit)	3,6	porselein	6,5
germanium	16	prespaan	3,5–4,5
glas (pyrex)	4–5	pvc	4,5
glas	5–16	rubber	2,8
hout	3–7	seleen	6,6
keukenzout	6,1	silicium	12
kwarts	4,3	steatiet	6,5
marmar	8,5	teflon	2,1
		zwavel	3,6–4,3

**vloeistoffen** ( $T = 298 \text{ K}$ )

aceton	21	methanol	34
alcohol	24–26	olie	1,5–4,7
aniline	6,9	paraffine-olie	2,2
benzeen	2,3	siliconenolie	2,2
chloroform	4,8	terpentijn	2,2
ether	4,3	tetra	2,2
glycerol	42–43	tolueen	2,4
koolstofdissulfide	2,6	water	80

**gassen** ( $T = 273 \text{ K}$ ,  $p = p_n = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$ )

ammoniak	1,0072	lucht	1,00056
koolstofdioxide	1,00099	methaan	1,0009
koolstofmonoxide	1,00070	waterdamp (393 K)	1,00060
helium	1,00007	waterstof	1,00027

*Tabel 1.21 Magnetische eigenschappen verschillende materialen*

<b>diamagnetisch</b> ( $\mu_r = \kappa + 1$ ) (20°C, tenzij anders vermeld)		<b>paramagnetisch</b> ( $\mu_r = \kappa + 1$ ) (20°C, tenzij anders vermeld)	
	$\kappa, \chi_m$		$\kappa, \chi_m$
bismuth	$-170 \times 10^{-6}$	aluminium	$+20,7 \times 10^{-6}$
germanium	$-7,1 \times 10^{-6}$	lucht	$0,36 \times 10^{-6}$
glas	$-13 \times 10^{-6}$	magnesium	$11,8 \times 10^{-6}$
goud	$-34,5 \times 10^{-6}$	mangaan	$0,9 \times 10^{-3}$
koper	$-9,7 \times 10^{-6}$	natrium	$8 \times 10^{-6}$
kwik	$-28,4 \times 10^{-6}$	palladium	$0,78 \times 10^{-3}$
lood	$-15,8 \times 10^{-6}$	platina	$0,28 \times 10^{-3}$
selenium	$-19,0 \times 10^{-6}$	uranium	$0,41 \times 10^{-3}$
silicium	$-3,3 \times 10^{-6}$	wolfram	$77,8 \times 10^{-6}$
telluur	$-24,3 \times 10^{-6}$	zuurstof	
tin	$-28,6 \times 10^{-6}$	gas, 1 atm.	$3,87 \times 10^{-3}$
water	$-9,0 \times 10^{-6}$	vloeistof, 70 K	$1,9 \times 10^{-3}$
waterstof (1 atm)	$-4,5 \times 10^{-9}$		
ijs (0°C)	$-8,8 \times 10^{-6}$		
zilver	$-23,8 \times 10^{-6}$		
zirkoon	$-109 \times 10^{-6}$		
zink	$-15,6 \times 10^{-6}$		
zwavel	$-12,6 \times 10^{-6}$		



Tabel 1.21 (vervolg)

**zacht ferromagnetisch en ferrimagnetisch**

	samenstelling massa %	$\mu_r$ max	$B_{\text{verz.}}$ [T]	$H_{\text{coerc.}}$ [A/m]	Curie- temp. [K]
		$\times 10^3$			
kobalt	100 Co	0,250	1,79	800	1390
nikkel	100 Ni	0,530	0,62	56	630
ijzer (zuiver)	100 Fe	200	2,16	4	1040
ijzer	99,8 Fe	5	2,16	80	1040
staal	1 C	3,8	2,0	600	1040
silicium-ijzer	3 Si	50	2,0	8	1010
45-permalloy	45 Ni	25	1,6	24	750
78-permalloy	78,5 Ni	70	1,08	4	870
hipernik	50 Ni	70	1,6	4	770
permendur	50 Co, 1 V	5	2,45	160	1250
mumetaal	77 Ni, 5 Cu, 2 Cr	100	0,65	4	670
Mn-Zn ferriet (ferroxcube 3A)	(MnO) <sub>0,5</sub> (ZnO) <sub>0,5</sub> Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2,2	0,37	8	420
Ni-Zn ferriet (ferroxcube 4A)	(NiO) <sub>0,36</sub> (ZnO) <sub>0,64</sub> Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6,5	0,37	30	410
supermalloy		800–1000			

rest Fe

**hard ferromagnetisch**

		$B_{\text{rem}}$ [T]	$H_{\text{coerc.}}$ [A/m]	$(B \cdot H)_{\text{max}}$ [J/m <sup>3</sup> ]	Curie- temp. [K]
			$\times 10^3$	$\times 10^3$	
koolstofstaal	1 C, 0,5 Mn	0,9	4	1,6	1040
chromstaal	3 Cr, 0,9 C, 0,3 Mn	0,9	4,8	2,3	1040
wolframstaal	6 W, 0,7 C, 0,3 Cr	1,05	5,2	2,4	1030
remalloy	17 Mo, 12 Co	1,0	1,8	8	1050
alnico I	21 Ni, 12 Al, 5 Co, 3 Cu	0,69	39	11,1	1050
alnico V (ticonal)	24 Co, 14 Ni, 8,5 Al, 3,5 Cu	1,25	53	45,3	1160
samarium-kobalt	Co <sub>5</sub> Sm	0,87	670	150	1000
ferroxdur 1	BaO–6Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (isotr.)	0,22	140	7,6	720
ferroxdur 2	BaO–6Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> (anisotr.)	0,40	180	28	730
neodymium-ijzer	Nd, Fe B	0,45	310	320	100

rest Fe

# Scheikunde

---

## 1 Algemeen

- 1.1 Basisbegrippen
- 1.2 Chemische reacties
- 1.3 Diverse begrippen
- 1.4 Elementen en hun ionen

## 2 Tabellen

- 2.1 Overzicht
- 2.2 Thermodynamische gegevens
- 2.3 Analytische gegevens
- 2.4 Diversen

# 1 Algemeen

## 1.1 Basisbegrippen

### Element en atoom

Een *element* is een stof bestaande uit *atomen* waarvan de kernen dezelfde positieve elektrische lading hebben. Die lading krijgt de kern door de aanwezigheid van een heel aantal *protonen*. Het aantal protonen komt overeen met het *atoomnummer*. In de kern bevinden zich bovendien een bepaald aantal *neutronen* (uitgezonderd waterstof) die de kern stabiliseren door de afstotende elektrische ladingen te ‘verdunnen’. Om het atoom elektrisch neutraal te maken is er om de kern een ‘wolk’ van *elektronen* met gelijke maar tegengestelde (negatieve) lading als de kern.

### Isotopen

Een element kan uit verscheidene soorten bestaan, de zogenaamde *isotopen*, die zich enkel onderscheiden door een verschillend aantal neutronen. Bij elkaar hebben alle elementen enkele honderden isotopen, al dan niet stabiel.

### Molecuul

Een *molecuul* is samengesteld uit atomen van (één,) twee of meer verschillende elementen, die in een bekende/gedefinieerde verhouding aanwezig zijn.

### Mol, atoommassa en molecuulmassa

De eenheid *mol* (niet te verwarren met ‘molair’) is een maat voor het aantal deeltjes. Dit getal noemt men de *constante van Avogadro*  $N_A = 0,602214 \cdot 10^{27} \text{ kmol}^{-1}$ . Zie ook hoofdstuk [Eenheden en symbolen](#), par. 1.1 en [Natuurkunde](#), par. 3.3.

De *atoommassa* (zie ook [tabel 1.2](#)) van een element geeft aan hoeveel gram de massa van één mol atomen van dat element bedraagt. Het is gebruikelijk dat hierbij rekening wordt gehouden met het in de natuur voorkomen van isotopen. Zo is de atoommassa van  $\text{Cl}^{35}$  (Cl = chloor, 35 geeft de atoommassa aan) anders dan die van  $\text{Cl}^{37}$ . De waarde van de atoommassa van chloor is een gewogen gemiddelde van de atoommassa’s van de isotopen die in de natuur voorkomen.

De *molecuulmassa* van een stof geeft aan hoeveel gram de massa van één mol moleculen van die stof bedraagt. Daartoe worden de atoommassa's van alle in het molecuul voorkomende elementen, naar voorkomen, opgeteld. Dus de molecuulmassa van H<sub>2</sub>O is:

$$(2 \cdot \text{H}) + (1 \cdot \text{O}) = (2 \cdot 1,0079) + (1 \cdot 15,999) \\ = 18,0148 \text{ (gr/mol)}$$

Zie ook [tabel 2.1](#) en [tabel 2.2](#).

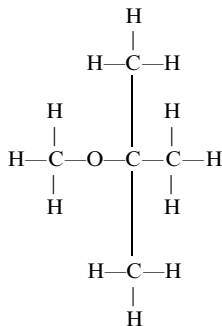
### Chemische formule

Een stof kan gekarakteriseerd worden door een *formule*. Hierin worden de elementen en hun verhouding tot elkaar genoemd.

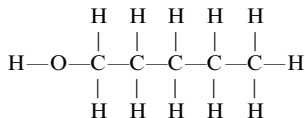
*Voorbeeld.* Methyltertiairbutylether heeft als *brutoformule*:



en als *structuurformule*:



Aan de brutoformule is in dit geval niet te zien om welke stof het gaat. C<sub>5</sub>H<sub>12</sub>O kan bijvoorbeeld ook 1-pentanol zijn:

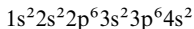


## Elektronenconfiguratie

De elektronen in de *elektronenwolk* rond de kern bevinden zich in ‘voorgeschreven’ *energieniveaus*. Deze niveaus worden onderverdeeld in zogenaamde *schillen*: K, L, M, N, P, O en Q (ook aangeduid als: 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7). De schillen zijn verdeeld in een oplopend aantal ‘sub’niveaus: s, p, d en f. In de hoge niveaus kan er overlap optreden met de ‘sub’niveaus.

Er is een grens aan het aantal elektronen in een schil. K heeft maximaal 2 elektronen, L maximaal 8, M maximaal 18 en N maximaal 32. Het zwaarste natuurlijke element is uranium. Daardoor zal de O-schil in de praktijk niet meer dan 22 elektronen herbergen. De elektronen in de schillen zijn opgeborgen in de ‘sub’niveaus: s, p, d en f. In het s-‘sub’niveau kunnen maximaal 2 elektronen zitten, in het p-‘sub’niveau 6, in het d-‘sub’niveau 10 en in het f-‘sub’niveau 14.

Het *periodiek systeem* (zie [tabel 1.2](#)) is gebaseerd op het opvullen van de niveaus met elektronen. Hierdoor zijn er steeds elementen die dezelfde opvulling van de buitenste niveaus hebben en daardoor ook overeenkomsten in chemische eigenschappen. De elektronenconfiguratie van Calcium (Ca) wordt als volgt weergegeven:



De superscripts geven het aantal elektronen aan in de energieniveaus 1s, 2s, 2p enz. In het periodiek systeem is alleen het laatste gedeelte van deze notatie weergegeven, omdat de opvulling van de eerste niveaus steeds gelijk is. Uit de elektronenconfiguratie van een element is meestal ook de elektronenconfiguratie van het *ion* af te leiden. Bijvoorbeeld Ca kan de 2 elektronen van het 4s-niveau verliezen en vormt dan een  $Ca^{2+}$ -ion.

## Ionisatie-energie en elektronenaffiniteit

*Ionisatie-energie* of *ionisatiepotentiaal* is de hoeveelheid energie nodig om een elektron af te splitsen. Vanzelfsprekend zal het ‘meest losse’ elektron het gemakkelijkst te verwijderen zijn. Bij het voorbeeld van Ca naar  $Ca^{2+}$  hierboven is de ionisatie-

energie van het eerste elektron  $6,11 \text{ eV}$  ( $1 \text{ eV} = 0,1602177 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ ) en van het tweede elektron  $11,87 \text{ eV}$ . Het verwijderen van het derde elektron kost veel meer energie (ca.  $51,2 \text{ eV}$ ) en zal daarom ook niet gauw gebeuren. De ionisatie-energieën van het eerste elektron van de elementen zijn in [tabel 1.1](#) opgenomen.

De *elektronenaffiniteit* is de hoeveelheid energie die vrijkomt als een neutraal atoom één elektron opneemt. De elektronenaffiniteiten van een aantal bekende elementen zijn: Fluor (F)  $3,45 \text{ eV}$ , Chloor (Cl)  $3,63 \text{ eV}$ , Broom (Br)  $3,45 \text{ eV}$  en Jood (I)  $3,11 \text{ eV}$ . Verschillende bronnen vermelden verschillende elektronenaffiniteiten.

### Elektronegativiteit

De *elektronegativiteit* is een maat voor de neiging van een element om in een *covalente binding* (*elektronenpaarbinding*) de elektronen naar zich toe te trekken (Pauling). Hoewel de term in de literatuur vaak wordt toegepast, bestaat er geen ondubbelzinnige manier om de elektronegativiteit te meten. De elektronegativiteit is voor kwalitatieve en in mindere mate voor kwantitatieve beschouwingen een nuttig gegeven. In [tabel 1.1](#) zijn de elektronegativiteiten van Pauling opgenomen.

Als twee atomen A en B in een molecuul in elektronegativiteit  $x_A$  en  $x_B$  verschillen, zal een covalente binding tussen de atomen een *polair* of *ionogeen* karakter krijgen:

- $|x_A - x_B| = 0$ : 0% ionogeen karakter.
- $|x_A - x_B| = 1$ : ca. 22% ionogeen karakter.
- $|x_A - x_B| = 2$ : ca. 63% ionogeen karakter.
- $|x_A - x_B| = 3$ : ca. 89% ionogeen karakter.

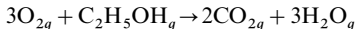
De elektronen zijn verschoven naar het meest elektronegatieve element. Een molecuul met een polair of ionogeen karakter zal dan ook een *dipoolmoment* ([tabel 2.17](#)) hebben.

## 1.2 Chemische reacties

### Reactievergelijking

Een *chemische reactie* is een proces waarbij stoffen in andere stoffen veranderen. De notatie waarin dat aangegeven wordt is een *reac-*

*tievergelijking*. Bijvoorbeeld de volledige verbranding van ethanol ( $C_2H_5OH$ ) aan lucht. Lucht bestaat uit voornamelijk stikstof en zuurstof. In de verbranding is stikstof inert.



Het subscript  $g$  duidt erop dat de stof zich in gasfase bevindt. In de reactievergelijking moeten van elk element links en rechts van de pijl evenveel atomen staan. In geval er ionen in de reactie meedoen, moet de totale lading links en de totale lading rechts gelijk zijn.

### Vormingsenthalpie

Over het algemeen zal het verlopen van de reactie met energie-effecten (warmte) gepaard gaan. Om deze (warmte-)effecten (= *reactieenthalpieën*) te berekenen maakt men gebruik van de thermodynamische grootte *vormingsenthalpie*. Omdat de *enthalpie*  $H$  van een stof afhankelijk is van de temperatuur en de druk, definieert men een zogenaamde *standaard toestand*. Dit is 298,15 K (= 25 °C) en 0,1 MPa (= 1 bar). Absolute enthalpieën zijn niet te meten (en voor thermodynamische berekeningen ook niet nodig), zodat men de vormingsenthalpieën van de elementen gelijk 0 (nul) stelt. Voor ionen in waterige oplossing geldt dat de standaardvormingsenthalpie van  $H^+$  0 (nul) is, de overige ionen in waterige oplossing zijn daaraan aangepast.

De standaardvormingsenthalpieën van enkele anorganische en organische stoffen zijn in [tabel 2.1](#) en [2.2](#) opgenomen.

### Reactie-enthalpie

De *reactie-enthalpie* bij de verbranding van 1 mol ethanol (46,068 gram) is te berekenen. Dit gebeurt door van de vormingsenthalpie van de gevormde stoffen (producten  $CO_2$  en  $H_2O$ ) de vormingsenthalpie van de reactanten ( $O_2$  en  $C_2H_5OH$ ) af te trekken:

$$\Delta H_{\text{reactie}} = (2 \cdot \Delta H_f^0 CO_2 + 3 \cdot \Delta H_f^0 H_2O) - (1 \cdot \Delta H_f^0 C_2H_5OH + 3 \cdot \Delta H_f^0 O_2)$$

$$\Delta H_{\text{reactie}} = (2 \cdot -393,509 + 3 \cdot -241,818) - (1 \cdot -234,81 + 3 \cdot 0,0)$$

$$\Delta H_{\text{reactie}} = -1277,662 \text{ kJ per mol ethanol (bij } 298,15 \text{ K)}$$

Indien de  $\Delta H_{\text{reactie}}$  een negatieve waarde heeft betekent dit dat er energie vrijkomt en spreekt men van een *exotherme reactie*. Indien er energie toegevoegd moet worden spreekt men van een *endotherme reactie*.

### Reactie-evenwicht

Het endotherm of exotherm zijn van een reactie geeft geen uitsluitel of een reactie wel of niet verloopt, en zegt ook niets over de snelheid van een eventueel verloop. Als een reactie verloopt zal op een gegeven moment *evenwicht* bereikt zijn. Dat wil zeggen dat er per tijdseenheid evenveel van de reactanten in producten omgevormd worden als er producten weer terug in reactanten worden omgezet. Het evenwicht wordt weergegeven met de *evenwichtsconstante K*. Bijvoorbeeld:



waarin:

$[A], [B], \dots$  = concentraties van A, B, ... in het reactiemengsel

Er bestaat een verband tussen de evenwichtsconstante en de thermodynamische grootheid *Gibbs vrije energie G*, ook wel *vrije energie* genoemd. Het verband tussen Gibbs vrije energie en enthalpie is (zie ook [Natuurkunde, par. 4.5 Thermodynamica](#)):

$$\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$$

waarin:

$G$  = Gibbs vrije energie [J/kmol]

$H$  = enthalpie [J/kmol]

$T$  = temperatuur [K]

$S$  = entropie [J/(kmol·K)]

De relatie tussen de evenwichtsconstante  $K$  en  $\Delta G$  is:

$$\Delta G = -R \cdot T \cdot \ln K$$

waarin:

$R$  = molaire gasconstante  $\approx 8,31451 \times 10^3 \text{ J/(kmol}\cdot\text{K)}$

$T$  = temperatuur [K]



In het voorbeeld van de verbranding van ethanol is  $\Delta G_{\text{reactie}}$  ( $\Delta G =$  waarden zijn in tabel 2.1 en 2.2 opgenomen, let op de afwijkende dimensie):

$$\Delta G_{\text{reactie}} = (2 \cdot \Delta G_f^0 \text{CO}_2 + 3 \cdot \Delta G_f^0 \text{H}_2\text{O}) - (1 \cdot \Delta G_f^0 \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 3 \cdot \Delta G_f^0 \text{O}_2)$$

$$\Delta G_{\text{reactie}} = (2 \cdot -394,359 + 3 \cdot -228,572) - (1 \cdot -168,28 + 3 \cdot 0,0)$$

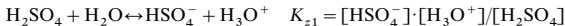
$$\Delta G_{\text{reactie}} = -1306,15 \text{ kJ (bij } 298,15 \text{ K)}$$

De evenwichtsconstante bij 298,15 K is:

$$K = [\text{CO}_2]^2 \cdot [\text{H}_2\text{O}]^3 / ([\text{O}_2]^3 \cdot [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]) > 10^{99}$$

Dat wil zeggen bij het bereiken van (chemisch) evenwicht is de concentratie van de (gevormde) producten zeer veel groter dan de concentratie van de (overgebleven) reactanten.

De *zuur-* en *baseconstanten*, resp.  $K_z$  en  $K_b$  zijn anders gedefinieerd, omdat zonder bijzondere mededeling waterige oplossingen bedoeld worden (zie tabel 2.7). Bijvoorbeeld zwavelzuur  $\text{H}_2\text{SO}_4$ :



De concentratie is in de dimensie mol/dm<sup>3</sup>. De concentratie water doet vanwege de definitie hier niet mee.

## Reactiesnelheid

De *reactiesnelheid* is het aantal mol van de bij de reactie betrokken stoffen dat per volume-eenheid en per tijdseenheid wordt omgezet of gevormd.

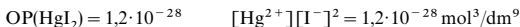
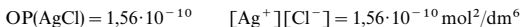
De reactiesnelheid is een functie van de reactiesnelheidsconstante, de orde van de reactie en de concentratie van de betrokken stoffen. De *reactiesnelheidsconstante* is een functie van de *activeringsenergie* van de reactie en de temperatuur. De activeringsenergie kan door bijvoorbeeld *katalysatoren* worden beïnvloed.

De *orde* van een reactie kan een functie zijn van het mechanisme dat de reactie regelt. Reacties kunnen zeer snel verlopen (bijvoorbeeld *explosies*), maar verhoudingsgewijs ook langzaam (bijvoorbeeld *roesten* van ijzer aan (omgevings) lucht).

## 1.3 Diverse begrippen

### Oplosbaarheidsproduct

Het *oplosbaarheidsproduct* (OP) van een stof is het ionenproduct van een verzadigde oplossing van die stof in water. Zie ook [tabel 2.5](#). Bijvoorbeeld:



Let op! De dimensie van het OP hangt af van het aantal ionen dat vrijkomt bij het oplossen.

### pH-waarde

Met de *pH-waarde* wordt de zuurgraad van een (waterige) oplossing aangegeven. De pH is de getalswaarde die wordt verkregen door de  $\log_{10}$  van de waterstofionen concentratie te vermenigvuldigen met  $-1$ . Zuiver water heeft bij  $25^\circ\text{C}$  een  $\text{pH} = 7$ . Waterige oplossingen zijn bij:

- $0 < \text{pH} < 3$  : sterk zuur;
- $3 < \text{pH} < 7$  : zwak zuur;
- $7 < \text{pH} < 11$  : zwak basisch;
- $11 < \text{pH} < 14$  : sterk basisch.

Zie ook [tabel 2.8](#).

### Iso-elektrisch punt

De moleculen van aminozuren hebben zure en basische functionele groepen. Om die reden kunnen aminozuren zowel zuur als basisch reageren, afhankelijk van de pH van de oplossing. Het *iso-elektrisch punt* is die pH-waarde waarbij het aminozuur ogenschijnlijk neutraal is. Zie ook [tabel 2.16](#).

## 1.4 Elementen en hun ionen

Tabel 1.1 Namen, symbolen en eigenschappen van de elementen en hun ionen (zie ook *par. 1.1*)

atoom- nummer	naam	symbool	[eV] <sup>1)</sup>	Pauling <sup>2)</sup>	oxidatie- toestanden <sup>3)</sup>
1	waterstof	H	13,59	2,1	+1, -1
2	helium	He	24,48	—	0
3	lithium	Li	5,39	1,0	+1
4	beryllium	Be	9,32	1,5	+2
5	boor	B	8,30	2,0	+3
6	koolstof	C	11,26	2,5	+2, +4, -4
7	stikstof	N	14,53	3,0	+1, +2, +3, +4 +5, -1, -2, -3
8	zuurstof	O	13,61	3,5	-2
9	fluor	F	17,42	4,0	-1
10	neon	Ne	21,56	—	0
11	natrium	Na	5,14	0,9	+1
12	magnesium	Mg	7,64	1,2	+2
13	aluminium	Al	5,98	1,5	+3
14	silicium	Si	8,15	1,8	+2, +4, -4
15	fosfor	P	10,48	2,1	+3, +5, -3
16	zwavel	S	10,36	2,5	+4, +6, -2
17	chloor	Cl	13,01	3,0	+1, +5, +7, -1
18	argon	Ar	15,76	—	0
19	kalium	K	4,34	0,8	+1
20	calcium	Ca	6,11	1,0	+2
21	scandium	Sc	6,54	1,3	+3
22	titaan	Ti	6,82	1,5	+2, +3, +4
23	vanadium	V	6,74	1,6	+2, +3, +4, +5
24	chromium	Cr	6,76	1,6	+2, +3, +6
25	mangaan	Mn	7,43	1,5	+2, +3, +4, +7
26	ijzer	Fe	7,87	1,8	+2, +3
27	kobalt	Co	7,86	1,9	+2, +3
28	nikkel	Ni	7,63	1,9	+2, +3
29	koper	Cu	7,72	1,9	+1, +2
30	zink	Zn	9,39	1,6	+2
31	gallium	Ga	6,00	1,6	+3
32	germanium	Ge	7,88	1,8	+2, +4
33	arsen	As	9,81	2,0	+3, +5, -3
34	seleen	Se	9,75	2,4	+4, +6, -2
35	broom	Br	11,85	2,8	+1, +5, -1
36	krypton	Kr	14,00	—	0
37	rubidium	Rb	4,18	0,8	+1
38	strontium	Sr	5,69	1,0	+2
39	yttrium	Y	6,38	1,2	+3
40	zirkonium	Zr	6,84	1,4	+4
41	niobium	Nb	6,88	1,6	+3, +5
42	molybdeen	Mo	7,10	1,8	+6
43	technetium	Tc	7,28	1,9	+4, +6, +7
44	ruthenium	Ru	7,36	2,2	+3
45	rhodium	Rh	7,46	2,2	+3
46	palladium	Pd	8,33	2,2	+2, +4
47	zilver	Ag	7,57	1,9	+1
48	cadmium	Cd	8,99	1,7	+2
49	indium	In	5,79	1,7	+3
50	tin	Sn	7,34	1,8	+2, +4
51	antimoon	Sb	8,64	1,9	+3, +5, -3
52	telluur	Te	9,01	2,1	+4, +6, -2
53	jodium (jood)	I	10,45	2,5	+1, +5, +7, -1
54	xenon	Xe	12,13	—	0
55	cesium	Cs	3,89	0,7	+1
56	barium	Ba	5,21	0,9	+2

*Tabel 1.1 (vervolg)*

atoom- nummer	naam	symbool	[eV] <sup>1)</sup>	Pauling <sup>2)</sup>	oxidatie- toestanden <sup>3)</sup>
57	lanthaan	La	5,61	1,0	+3
58	cerium	Ce	5,60	4)	+3, +4
59	praseodymium	Pr	5,46	4)	+3
60	neodymium	Nd	5,51	4)	+3
61	promethium	Pm	5,55	4)	+3
62	samarium	Sm	5,60	4)	+2, +3
63	europium	Eu	5,67	4)	+2, +3
64	gadolinium	Gd	6,16	4)	+3
65	terbium	Tb	5,98	4)	+3
66	dysprosium	Dy	6,80	4)	+3
67	holmium	Ho	6,02	4)	+3
68	erbio	Er	6,08	4)	+3
69	thulium	Tm	5,81	4)	+3
70	ytterbium	Yb	6,20	4)	+2, +3
71	lutetium	Lu	5,42	1,2	+3
72	hafnium	Hf	7,00	1,3	+4
73	tantaal	Ta	7,88	1,5	+5
74	wolfram	W	7,98	1,7	+6
75	renium	Re	7,87	1,9	+4, +6, +7
76	osmium	Os	8,50	2,2	+3, +4
77	iridium	Ir	9,00	2,2	+3, +4
78	platina	Pt	9,00	2,2	+2, +4
79	goud	Au	9,22	2,4	+1, +3
80	kwik	Hg	10,43	1,9	+1, +2
81	thallium	Tl	6,11	1,8	+1, +3
82	lood	Pb	7,42	1,9	+2, +4
83	bismut	Bi	7,29	1,9	+3, +5
84	polonium	Po	7,43	2,0	+2, +5
85	astaat	At	9,5	2,2	—
86	radon	Rn	10,75	—	0
87	francium	Fr	4,00	0,7	+1
88	radium	Ra	5,28	0,9	+2
89	actinium	Ac	6,90	1,1	+3
90	thorium	Th	6,95	1,3	+4
91	protactinium	Pa	—	1,4	+5, +4
92	uranium	U	6,08	1,4	+3, +4, +5, +6
93	neptunium	Np	—	1,4	+3, +4, +5, +6
94	plutonium	Pu	5,1	5)	+3, +4, +5, +6
95	americium	Am	6,00	5)	+3, +4, +5, +6
96	curium	Cm	—	5)	+3
97	berkelium	Bk	—	5)	+3, +4
98	californium	Cf	—	5)	+3
99	einsteinium	Es	—	5)	+3
100	fermium	Fm	—	5)	+3
101	mendelevium	Md	—	5)	+2, +3
102	nobelium	No	—	1,3	+2, +3
103	lawrencium	Lr	—	—	+3
104	dubnium	Db	—	—	+4
105	joliotium	Jl	—	—	—
106	rutherfordium	Rf	—	—	—
107	bohrium	Bh	—	—	—
108	hahnium	Hh	—	—	—
109	meitnerium	Mt	—	—	—

<sup>1)</sup> Het ionisatiepotentiaal van het eerste elektron [eV].

<sup>2)</sup> Pauling-elektronegativiteiten.

<sup>3)</sup> Stabiele oxidatietoestanden die het element kan aannemen.

<sup>4)</sup> Elementen 58 t/m 70 hebben een elektronegativiteit tussen 1,0 en 1,2.

<sup>5)</sup> Elementen 94 t/m 101 hebben een elektronegativiteit tussen 1,3 en 1,4.

Tabel 1.2 Periodiek systeem der elementen ( $h =$  hoofdgroep;  $n =$  nevensgroep) (zie ook par.1.1)

groep h/n	1h	2h	3n	4n	5n	6n	7n	8n	8n	1n	2n	3h	4h	5h	6h	7h	o		
1	1 H 1,0079 1s		atoomnummer → <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">24 Cr</span> ← atoomstraal $\times 10^{-10}$ m (hangt af van wijze van bepaling) → <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">51,996</span> ← → <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1,25</span> ← → <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4s 3d<sup>5</sup></span> ← ← elektronenconfiguratie															2 He 4,0026 1,29 1s <sup>2</sup>	
2	3 Li 6,941 2s	4 Be 9,0122 1,07 2s <sup>2</sup>																5 B 10,811 0,88 2s <sup>2</sup> 2p	6 C 12,011 0,77 2s <sup>2</sup> 2p <sup>2</sup>
3	11 Na 22,990 1,86 3s	12 Mg 24,305 1,55 3s <sup>2</sup>	*lanthanide-reeks **actinide-reeks overgangselementen										13 Al 26,982 1,39 3s <sup>2</sup> 3p	14 Si 28,086 1,17 3s <sup>2</sup> 3p <sup>2</sup>	15 P 30,974 1,04 3s <sup>2</sup> 3p <sup>3</sup>	16 S 32,066 1,04 3s <sup>2</sup> 3p <sup>4</sup>	17 Cl 35,453 0,99 3s <sup>2</sup> 3p <sup>5</sup>	18 Ar 39,948 1,92 3s <sup>2</sup> 3p <sup>6</sup>	
4	19 K 39,098 2,31 4s	20 Ca 40,078 1,91 4s <sup>2</sup>	21 Sc 44,956 1,62 4s <sup>2</sup> 3d	22 Ti 47,867 1,45 4s <sup>2</sup> 3d <sup>2</sup>	23 V 50,942 1,31 4s <sup>2</sup> 3d <sup>3</sup>	24 Cr 51,996 1,25 4s 3d <sup>5</sup>	25 Mn 54,938 1,12 4s <sup>2</sup> 3d <sup>5</sup>	26 Fe 55,845 1,24 4s <sup>2</sup> 3d <sup>6</sup>	27 Co 58,933 1,25 4s <sup>2</sup> 3d <sup>7</sup>	28 Ni 58,693 1,25 4s <sup>2</sup> 3d <sup>8</sup>	29 Cu 63,546 1,35 4s 3d <sup>10</sup>	30 Zn 65,39 1,31 4s <sup>2</sup> 3d <sup>10</sup>	31 Ga 69,723 1,48 4s <sup>2</sup> 4p	32 Ge 72,61 1,22 4s <sup>2</sup> 4p <sup>2</sup>	33 As 74,922 1,21 4s <sup>2</sup> 4p <sup>3</sup>	34 Se 78,96 1,17 4s <sup>2</sup> 4p <sup>4</sup>	35 Br 79,904 1,14 4s <sup>2</sup> 4p <sup>5</sup>	36 Kr 83,80 1,98 4s <sup>2</sup> 4p <sup>6</sup>	
5	37 Rb 85,468 2,43 5s	38 Sr 87,62 2,07 5s <sup>2</sup>	39 Y 88,906 1,78 5s <sup>2</sup> 4d	40 Zr 91,224 1,59 5s 4d <sup>2</sup>	41 Nb 92,906 1,43 5s 4d <sup>4</sup>	42 Mo 95,94 1,36 5s 4d <sup>5</sup>	43 Tc [98,906] 1,36 5s 4d <sup>6</sup>	44 Ru 101,07 1,33 5s 4d <sup>7</sup>	45 Rh 102,91 1,35 5s 4d <sup>8</sup>	46 Pd 106,42 1,38 4d <sup>10</sup>	47 Ag 107,87 1,52 5s 4d <sup>10</sup>	48 Cd 112,41 1,48 5s <sup>2</sup> 4d <sup>10</sup>	49 In 114,82 1,62 5s <sup>2</sup> 5p	50 Sn 118,71 1,40 5s <sup>2</sup> 5p <sup>2</sup>	51 Sb 121,76 1,41 5s <sup>2</sup> 5p <sup>3</sup>	52 Te 127,60 1,37 5s <sup>2</sup> 5p <sup>4</sup>	53 I 126,90 1,33 5s <sup>2</sup> 5p <sup>5</sup>	54 Xe 131,29 2,18 5s <sup>2</sup> 5p <sup>6</sup>	
6	55 Cs 132,91 2,62 6s	56 Ba 137,33 2,17 6s <sup>2</sup>	57–71 *	72 Hf 178,49 1,57 6s <sup>2</sup> 5d <sup>2</sup>	73 Ta 180,95 1,43 6s <sup>2</sup> 5d <sup>3</sup>	74 W 183,84 1,37 6s <sup>2</sup> 5d <sup>4</sup>	75 Re 186,21 1,37 6s <sup>2</sup> 5d <sup>5</sup>	76 Os 190,23 1,34 6s <sup>2</sup> 5d <sup>6</sup>	77 Ir 192,22 1,36 5d <sup>7</sup>	78 Pt 195,08 1,38 6s 5d <sup>9</sup>	79 Au 196,97 1,44 6s 5d <sup>10</sup>	80 Hg 200,59 1,48 6s <sup>2</sup> 5d <sup>10</sup>	81 Tl 204,38 1,66 6s <sup>2</sup> 6p	82 Pb 207,02 1,57 6s <sup>2</sup> 6p <sup>2</sup>	83 Bi 208,98 1,46 6s <sup>2</sup> 6p <sup>3</sup>	84 Po [209,98]	85 At [209,99]	86 Rn [222,02]	
7	87 Fr [223,02]	88 Ra [226,03]	89–103 **	104 Db –	105 JI –	106 Rf –	107 Bh –	108 Hn –	109 Mt –										
	7s	7s <sup>2</sup>		6d <sup>2</sup> 5f <sup>4</sup>															
			*	57 La 138,91 1,87 6s <sup>2</sup> 5d	58 Ce 140,12 1,82 – 4f <sup>2</sup>	59 Pr 140,91 1,82 – 4f <sup>3</sup>	60 Nd 144,24 1,83 – 4f <sup>4</sup>	61 Pm [146,92]	62 Sm 150,36 1,80 – 4f <sup>6</sup>	63 Eu 151,96 1,98 – 4f <sup>7</sup>	64 Gd 157,25 1,79 5d 4f <sup>7</sup>	65 Tb 158,93 1,76 – 4f <sup>9</sup>	66 Dy 162,50 1,76 – 4f <sup>10</sup>	67 Ho 164,93 1,75 – 4f <sup>11</sup>	68 Er 167,26 1,74 – 4f <sup>12</sup>	69 Tm 168,93 1,77 – 4f <sup>13</sup>	70 Yb 173,04 1,94 – 4f <sup>14</sup>	71 Lu 174,97 1,72 5d 4f <sup>14</sup>	
			**	89 Ac 227,03 1,88 7s <sup>2</sup> 6d	90 Th 232,04 1,80 6d <sup>2</sup> –	91 Pa [231,04] 1,60 6d 5f <sup>2</sup>	92 U 238,03 1,38 6d 5f <sup>3</sup>	93 Np [237,05] 1,31 6d 5f <sup>5</sup>	94 Pu [239,05] 1,6	95 Am 241,06 1,8	96 Cm [244,06]	97 Bk [249,08]	98 Cf [252,08]	99 Es [252,08]	100 Fm [257,10]	101 Md [258,10]	102 No [259,10]	103 Lr [262,11]	

De waarde van de *atoomstraal* hangt af van de wijze waarop deze bepaald is. Atoommassa's op 5 significante cijfers afgerond. Atoommassa's tussen [ ] betekent het element heeft geen stabiel isotoop.

# 2 Tabellen

## 2.1 Overzicht

Tabel 2.0 Overzicht tabellen

---

onderwerp

---

**thermodynamische gegevens (par. 2.2)**

thermodynamische gegevens anorganische stoffen

thermodynamische gegevens organische stoffen

---

**analytische gegevens (par. 2.3)**

oplosbaarheid zouten in water

oplosbaarheid gassen in water

oplosbaarheidsproducten

dissociatie-constanten organische zuren

zuur- en base-constanten

zuur- en base-indicatoren

gehalte en dichtheid van oplossingen bij 293K

concentraties van in de handel zijnde zuren

normaal redoxpotentialen

redox-indicatoren

molaire vriespuntsdaling en kookpuntsverhoging

calorische boven- en onderwaarden van gassoorten

equivalent geleidingsvermogen van ionen in water

---

**diversen (par. 2.4)**

aminozuren

dipoolmomenten

---

## 2.2 Thermodynamische gegevens

Tabel 2.1 Thermodynamische gegevens anorganische stoffen (zie ook par. 1.2)

stof <sup>1)</sup>		molecuul- massa [kg/kmol]	$\Delta H_f^0$ [kJ/mol]	$\Delta G_f^0$ [kJ/mol]	$S^0$ [J/(mol·K)]
Ag		107,87	0	0	42,55
Ag <sup>+</sup>	ao	107,87	105,579	77,107	72,68
AgNO <sub>3</sub>	cr	169,87	-124,39	-33,41	140,92
Al		26,982	0	0	28,33
Al <sup>3+</sup>	ao	26,982	-531,0	-485,0	-321,7
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	corundum	101,96	-1675,7	-1582,3	50,92
Br <sub>2</sub>	g	159,81	30,907	3,11	245,463
Br <sub>2</sub>	l	159,81	0	0	152,231
HBr	g	80,912	-36,40	-53,45	198,695
C	grafiet	12,011	0	0	5,74
C	diamant	12,011	1,895	2,900	2,377
CO	g	28,010	-110,525	-137,168	197,674
CO <sub>2</sub>	g	44,009	-393,509	-394,359	213,74
CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	ao	60,008	-677,14	-527,81	-56,9
HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	ao	61,016	-691,99	-586,77	91,2
Ca		40,078	0	0	41,42
Ca <sup>2+</sup>	ao	40,078	-542,83	-553,58	-53,1
CaO	cr	56,077	-635,09	-604,03	39,75
Ca(OH) <sub>2</sub>	cr	74,092	-986,09	-898,49	83,39
CaSO <sub>4</sub>	anhydriet	136,14	-1434,11	-1321,79	106,7
CaCO <sub>3</sub>	calciet	100,09	-1206,92	-1128,79	92,9
Cl <sub>2</sub>	g	70,906	0	0	223,066
Cl <sup>-</sup>	oa	35,453	-167,159	-131,299	56,5
HCl	g	36,461	-92,307	-97,299	186,908
Cr		51,996	0	0	23,77
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	cr	151,99	-1139,7	-1058,1	81,2
Cu		63,546	0	0	33,15
Cu <sup>2+</sup>	ao	63,546	64,77	65,49	-99,6
Cu <sub>2</sub> O	cr	143,09	-168,6	-146,0	93,14
CuO	cr	79,545	-157,3	-129,7	42,63
CuSO <sub>4</sub>	cr	159,61	-771,36	-661,8	109,0
F <sub>2</sub>	g	37,996	0	0	202,78
F <sup>-</sup>	ao	18,998	-332,63	-278,79	-13,8
HF	g	20,006	-271,1	-273,2	173,779
Fe		55,845	0	0	27,28

Tabel 2.1 (vervolg)

stof <sup>1)</sup>		molecuul- massa [kg/kmol]	$\Delta H_f^0$ [kJ/mol]	$\Delta G_f^0$ [kJ/mol]	$S^0$ [J/(mol·K)]
Fe <sup>2+</sup>	ao	55,845	-89,1	-78,90	-137,7
Fe <sup>3+</sup>	ao	55,845	-48,5	-4,7	-315,9
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub>	magnetiet	231,53	-1118,4	-1015,4	146,4
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	hematiet	159,69	-824,2	-742,2	87,4
H <sub>2</sub>	g	2,0158	0	0	130,684
H <sup>+</sup>	ao	1,0079	0	0	0
H <sub>2</sub> O	g	18,015	-241,818	-228,572	188,825
H <sub>2</sub> O	l	18,015	-285,830	-237,129	69,91
K		39,098	0	0	64,18
K <sup>+</sup>	ao	39,098	-252,38	-283,27	102,5
KNO <sub>3</sub>	rhombisch	101,10	-369,82	-306,55	152,09
Mg		24,305	0	0	32,68
Mg <sup>2+</sup>	ao	24,305	-466,85	-454,8	-138,1
MgO	periclase	40,304	-601,70	-569,43	26,94
MnO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	ao	118,93	-653,0	-500,7	59,0
N <sub>2</sub>	g	28,014	0	0	191,61
NH <sub>3</sub>	g	17,031	-46,11	-16,45	192,45
NO <sub>2</sub>	ao	46,005	-104,6	-32,2	123,0
NO <sub>3</sub>	ao	62,004	-205,0	-108,74	146,4
NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	ao	18,037	-132,51	-79,31	113,4
NH <sub>4</sub> Cl	cr	53,492	314,43	-202,87	94,6
Na		22,990	0	0	51,21
Na <sup>+</sup>	ao	22,990	-240,12	-261,905	59,0
NaOH	cr	39,997	-425,609	-379,494	10,489
NaCl	cr	58,443	-411,153	-384,138	72,13
O <sub>2</sub>	g	31,998	0	0	205,138
OH <sup>-</sup>	ao	17,007	-229,994	-157,244	-10,75
H <sub>2</sub> S	g	34,082	-20,63	-33,56	205,79
SO <sub>2</sub>	g	64,064	-296,830	-300,194	248,22
SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	ao	96,062	-909,27	-744,53	20,1
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	l	98,078	-813,989	-690,003	156,904
Zn		65,39	0	0	41,63
Zn <sup>2+</sup>	ao	65,39	-153,89	-147,06	-112,1
ZnSO <sub>4</sub>	cr	161,35	-982,8	-871,5	110,5

<sup>1)</sup> ao = waterige oplossing, standaard toestand, m = 1 mol/kg.

cr = kristallijn.

l = vloeistof.

g = gas.



Tabel 2.2 Thermodynamische gegevens organische stoffen (zie ook par. 1.2)

stof	naam	1)	molecuul- massa [kg/kmol]	$\Delta H_f^0$ [kJ/mol]	$\Delta G_f^0$ [kJ/mol]	$S^0$ [J/(mol·K)]
CCl <sub>4</sub>	tetrachloorkoolstof	l	153,82	-132,84	-62,63	216,19
		g		-100,42	-58,24	310,12
CHCl <sub>3</sub>	chloroform	l	119,38	-132,21	-71,84	202,92
		g		-101,25	-68,53	295,64
CH <sub>2</sub> O	formaldehyde	g	30,026	-115,90	-109,91	218,78
CH <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	mierenzuur	l	46,025	-424,76	-361,46	128,95
		g		-378,61	-351,00	248,74
CH <sub>3</sub> NO	formamide	g	45,041	-186,19	-141,04	248,45
CH <sub>4</sub>	methaan	g	16,043	-74,85	-50,84	186,27
CH <sub>4</sub> N <sub>2</sub> O	ureum	s	60,056	-333,17	-197,15	104,60
		g		-245,60	-152,72	249,37
CH <sub>4</sub> O	methanol	l	32,042	-238,57	-166,23	126,78
		g		-201,17	-162,51	239,70
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	acetyleen	g	26,038	226,73	209,20	200,83
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	oxaalzuur	s	90,034	-829,94	-701,15	120,08
C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> Cl	vinylchloride	g	52,488	35,15	51,51	263,93
C <sub>2</sub> H <sub>3</sub> N	acetonitril	l	41,053	53,14	98,87	149,62
		g		87,86	105,60	243,47
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	ethylene	g	28,054	52,30	68,12	219,45
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O	acetaldehyde	l	44,053	-192,05		
		g		-166,36	-133,30	264,22
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub>	azijnzuur	l	60,052	-484,09	-389,36	159,83
		g		-434,84	-376,69	282,50
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> NO	acetamide	l	59,068	-317,57		
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	ethaan	g	30,069	-84,68	-32,93	229,49
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O	ethylalcohol	l	46,068	-276,98	-174,14	160,67
		g		-234,81	-168,28	282,59
C <sub>2</sub> H <sub>7</sub> N	ethylamine	l	45,084	-74,10		
		g		-46,02	37,28	284,85
C <sub>3</sub> H <sub>3</sub> N	acrylonitril	l	53,064	150,21		
		g		184,93	195,31	273,93
C <sub>3</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub>	acrylzuur	l	72,063	-384,09		
		g		-336,23	-286,06	315,01
C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	propyleen	g	42,080	20,42	62,72	266,94
C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O	aceton	l	58,079	-248,11	-155,39	200,41
		g		-217,57	-153,05	294,93
C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O <sub>2</sub>	propionzuur	l	74,078	-510,87		
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	propaan	g	44,096	-103,85	-23,47	269,91

Tabel 2.2 (vervolg)

stof	naam		molecuul- massa [kg/kmol]	$H_f$ [kJ/mol]	$G_f$ [kJ/mol]	$S$ [J/(mol·K)]
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O	isopropylalcohol	l	60,095	-317,98	-180,41	180,58
		g		-272,59	-173,59	309,91
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O	propylalcohol	l	60,095	-304,55	-170,67	192,88
		g		-257,53	-162,97	324,80
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O <sub>3</sub>	glycerol	l	92,093	-668,60	-477,06	204,47
C <sub>3</sub> H <sub>9</sub> N	propylamine	l	59,111	-103,76		
		g		-72,38	39,79	324,18
C <sub>4</sub> H <sub>4</sub> O <sub>4</sub>	fumaarzuur	s	116,07	-811,07	-653,67	166,10
	maleïnezuur	s		-790,61	-631,20	159,41
C <sub>4</sub> H <sub>6</sub> O <sub>3</sub>	azijnzuuranhydride	l	102,09	-624,00	-488,82	268,61
		g		-575,72	-476,68	389,95
C <sub>4</sub> H <sub>8</sub>	1-buteen	g	56,107	-0,13	71,30	305,60
C <sub>4</sub> H <sub>8</sub> O <sub>2</sub>	ethylacetaat	l	88,105	-479,03	-332,71	259,41
		g		-442,92	-327,40	362,75
C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> N	pyrrolidine	l	71,122	-41,17	108,53	204,01
		g		-3,60	114,68	309,49
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	butaan	l	58,123	-147,65	-15,06	230,96
		g		-126,15	-17,15	310,12
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> O	butylalcohol	l	74,122	-325,81	-161,08	225,73
		g		-274,43	-150,67	363,17
C <sub>5</sub> H <sub>5</sub> N	pyridine	l	79,102	100,00	181,33	177,90
		g		140,16	190,20	282,80
C <sub>5</sub> H <sub>8</sub> O <sub>4</sub>	glutaarzuur	s	132,11	-960,06		
C <sub>5</sub> H <sub>10</sub>	1-penteen	l	70,134	-46,69	78,20	262,55
		g		-20,92	79,12	345,81
C <sub>5</sub> H <sub>11</sub> N	piperidine	l	85,149	-88,28		
		g		-48,99		
C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	pentaan	l	72,150	-173,22	-9,46	262,67
		g		-146,44	-8,37	348,95
C <sub>5</sub> H <sub>12</sub> O	pentylalcohol	l	88,149	-357,94	-161,25	254,81
		g		-302,38	-149,75	402,54
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	benzeen	l	78,113	49,04	124,35	173,26
		g		82,93	129,66	269,20
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> O	fenol	s	94,112	-165,02	-50,42	144,01
		g		-96,36	-32,89	315,60
C <sub>6</sub> H <sub>7</sub> N	aniline	l	93,128	31,43	149,08	191,29
		g		86,86	166,69	319,16
C <sub>6</sub> H <sub>12</sub>	cyclohexaan	l	84,161	-156,23	26,65	204,35
		g		-123,14	31,76	298,24

Tabel 2.2 (vervolg)

stof	naam	<sup>1)</sup>	molecuul- massa [kg/kmol]	$\Delta H_f^0$ [kJ/mol]	$\Delta G_f^0$ [kJ/mol]	$S^0$ [J/(mol·K)]
C <sub>6</sub> H <sub>12</sub> O	cyclohexanol	l	100,16	-348,19	-133,34	199,58
		g		-294,55	-117,91	327,69
C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	hexaan	l	86,177	-198,82	-4,35	296,06
		g		-167,19	-0,25	388,40
C <sub>6</sub> H <sub>14</sub> O	hexylalcohol	l	102,18	-379,36	-151,63	287,02
		g		-319,62	-137,95	441,50
C <sub>7</sub> H <sub>6</sub> O <sub>2</sub>	benzoëzuur	s	122,12	-385,14	-245,27	167,57
		g		-290,20	-210,41	368,99
C <sub>7</sub> H <sub>8</sub>	tolueen	l	92,140	12,01	113,76	220,96
		g		50,00	122,01	320,66

<sup>1)</sup> l = vloeistof.

g = gas.

s = vast.

## 2.3 Analytische gegevens

Tabel 2.3 Oplosbaarheid zouten in water (298 K)

positieve ionen	negatieve ionen											
	PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	SO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	CH <sub>3</sub> COO <sup>-</sup>	OH <sup>-</sup>	O <sup>2-</sup>	S <sup>2-</sup>	I <sup>-</sup>	Cl <sup>-</sup>	Br <sup>-</sup>
Na <sup>+</sup>	g	g	g	g	g	g	g	o	g	g	g	g
K <sup>+</sup>	g	g	g	g	g	g	g	o	g	g	g	g
NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	o	g	g	g	o	g		o	g	g	g	g
Ca <sup>2+</sup>	s	m	s	g	s	g	m	o	m	g	g	g
Ba <sup>2+</sup>	s	s	s	g	s	g	g	o	m	g	g	g
Ag <sup>+</sup>	s	m	s	g	s	m		s	s	s	s	s
Pb <sup>2+</sup>	s	s	s	g	s	g	s	s	s	s	m	m
Hg <sub>2</sub> <sup>2+</sup>	s	s	s	g	s	m		s	s	s	s	s
Hg <sup>2+</sup>	s	o		g	s	g		s	s	s	g	m
Cu <sup>2+</sup>	s	g	s	g	s	g	s	s	s		m	g
Al <sup>3+</sup>	s	g		g	o	g	s	s	o	g	g	g
Fe <sup>2+</sup>	s	g	s	g	s	g	s	s	s	g	g	g
Fe <sup>3+</sup>	s	g		g	o	g	s	s	s		g	g
Mg <sup>2+</sup>	s	g	s	g	s	g	s	s	m	g	g	g
Zn <sup>2+</sup>	s	g	s	g	s	g	s	s	s	g	g	g

g : goed oplosbaar in water (meer dan ca. 0,1 mol/dm<sup>3</sup>).

m : matig oplosbaar in water (minder dan ca. 0,1 mol/dm<sup>3</sup> en meer dan ca. 0,01 mol/dm<sup>3</sup>).

s : slecht oplosbaar in water (minder dan ca. 0,01 mol/dm<sup>3</sup>).

o : ontleedt in water of reageert met water.

Tabel 2.4 Oplosbaarheid gassen in water ( $p = p_0$ ) [mol/dm<sup>3</sup>]

temperatuur [K]	HCl	Cl <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	NH <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> S	SO <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	CO
		$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$		$\times 10^{-2}$		$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-4}$
273	22,6	20,6	9,60	21,8	10,5	52,5	20,8	3,56	7,63	15,8
283		14,1	8,79	17,0	8,30	40,0	15,2	2,53	5,31	12,6
293	19,7	10,3	8,17	13,8	6,88	31,3	11,5	1,76	3,88	10,4
298	19,0	9,02	7,90	12,6	6,38	27,8	10,2	1,46	3,35	9,55
303		8,04	7,59	11,6	5,98	25,1	9,11	1,21	2,95	8,93
313	17,2	6,43	7,32	10,3	5,27		7,41	0,84	2,32	7,90
323		5,45	7,19	9,33	4,87		6,21		1,92	7,19
333	15,1	4,55	7,14	8,71	4,55		5,31		1,56	6,65
343		3,84		8,17	4,38		4,55			6,43
353		3,04		7,86	4,29		4,11			6,38
363		1,74		7,68	4,24		3,75			6,34
373		0,00		7,59	4,24		3,62			6,29

$p_0 = 10^5$  Pa.

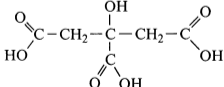
Tabel 2.5 Oplosbaarheidsproducten (zie ook [par. 1.2](#))

groep	verbinding	oplosbaarheids- product	temperatuur [K]
hydroxiden	Ag(OH)	$1,52 \cdot 10^{-8}$	293
	Al(OH) <sub>3</sub>	$3,7 \cdot 10^{-15}$	298
	Fe(OH) <sub>2</sub>	$1,64 \cdot 10^{-14}$	291
	Fe(OH) <sub>3</sub>	$1,1 \cdot 10^{-36}$	291
	Cu(OH) <sub>2</sub>	$1,6 \cdot 10^{-20}$	293
	Mg(OH) <sub>2</sub>	$1,2 \cdot 10^{-11}$	291
	Mn(OH) <sub>2</sub>	$7 \cdot 10^{-15}$	293
	Pb(OH) <sub>2</sub>	$1 \cdot 10^{-15}$	298
	Zn(OH) <sub>2</sub>	$1,8 \cdot 10^{-14}$	292
carbonaten	Ag <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>	$6,15 \cdot 10^{-12}$	298
	BaCO <sub>3</sub>	$8,1 \cdot 10^{-9}$	298
	CaCO <sub>3</sub>	$0,87 \cdot 10^{-8}$	298
	MgCO <sub>3</sub>	$2,6 \cdot 10^{-5}$	285
	PbCO <sub>3</sub>	$3,3 \cdot 10^{-14}$	291
	ZnCO <sub>3</sub>	$9 \cdot 10^{-11}$	293
halogeniden	AgBr	$7,7 \cdot 10^{-13}$	298
	AgCl	$1,56 \cdot 10^{-10}$	298
	AgI	$1,5 \cdot 10^{-16}$	298
	BaF <sub>2</sub>	$1,73 \cdot 10^{-6}$	299
	CaF <sub>2</sub>	$3,95 \cdot 10^{-11}$	299
	CuBr	$4,15 \cdot 10^{-8}$	292
	CuCl	$1,02 \cdot 10^{-6}$	292
	CuI	$5,06 \cdot 10^{-12}$	292
	HgBr <sub>2</sub>	$1,3 \cdot 10^{-21}$	298
	HgCl <sub>2</sub>	$2 \cdot 10^{-18}$	298
	HgI <sub>2</sub>	$1,2 \cdot 10^{-28}$	298
	MgF <sub>2</sub>	$7,1 \cdot 10^{-9}$	291
	PbCl <sub>2</sub>	$2,4 \cdot 10^{-4}$	293
	PbF <sub>2</sub>	$3,7 \cdot 10^{-8}$	299
	PbI <sub>2</sub>	$1,39 \cdot 10^{-8}$	298
	oxalaten	BaC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	$2,2 \cdot 10^{-7}$
CaC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>		$2,57 \cdot 10^{-9}$	298
FeC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>		$2,1 \cdot 10^{-7}$	298
MgC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>		$8,57 \cdot 10^{-5}$	291
PbC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>		$2,74 \cdot 10^{-11}$	291
ZnC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>		$1,35 \cdot 10^{-9}$	291

Tabel 2.5 (vervolg)

groep	verbinding	oplosbaarheids-product	temperatuur [K]
sulfiden	Ag <sub>2</sub> S	$1,6 \cdot 10^{-49}$	291
	Ag <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	$1 \cdot 10^{-44}$	293
	CdS	$3,6 \cdot 10^{-29}$	291
	CoS	$3 \cdot 10^{-26}$	291
	CuS	$2 \cdot 10^{-47}$	290
	Cu <sub>2</sub> S	$8,5 \cdot 10^{-45}$	291
	FeS	$3,7 \cdot 10^{-19}$	291
	HgS	$4 \cdot 10^{-53}$	293
	MnS	$1,4 \cdot 10^{-15}$	291
	NiS	$1,4 \cdot 10^{-21}$	291
	PbS	$3,4 \cdot 10^{-28}$	291
	Sb <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	$1 \cdot 10^{-40}$	293
	SnS	$1 \cdot 10^{-28}$	293
	ZnS	$1,2 \cdot 10^{-23}$	291
sulfaten	BaSO <sub>4</sub>	$1,1 \cdot 10^{-10}$	298
	CaSO <sub>4</sub>	$2,45 \cdot 10^{-5}$	298
	PbSO <sub>4</sub>	$1,06 \cdot 10^{-8}$	291
fosfaten	Ag <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	$2 \cdot 10^{-18}$	298
	MgNH <sub>4</sub> PO <sub>4</sub>	$2,5 \cdot 10^{-13}$	298
chromaten	Ag <sub>2</sub> CrO <sub>4</sub>	$9 \cdot 10^{-12}$	298
	BaCrO <sub>4</sub>	$1,6 \cdot 10^{-10}$	298
	PbCrO <sub>4</sub>	$1,77 \cdot 10^{-14}$	291

Tabel 2.6 Dissociatie-constanten van organische zuren

naam	formule		zuurconstante [mol/dm <sup>3</sup> ]	temperatuur [K]
mierenzuur	HCOOH		$1,77 \cdot 10^{-4}$	293
azijnzuur	CH <sub>3</sub> COOH		$1,76 \cdot 10^{-5}$	298
propionzuur	CH <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> COOH		$1,34 \cdot 10^{-5}$	298
boterzuur	CH <sub>3</sub> (CH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> COOH		$1,54 \cdot 10^{-5}$	293
caprylzuur	CH <sub>3</sub> (CH <sub>2</sub> ) <sub>6</sub> COOH		$1,28 \cdot 10^{-5}$	298
benzoëzuur	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COOH		$6,46 \cdot 10^{-5}$	298
oxaalzuur	(COOH) <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	$5,90 \cdot 10^{-2}$	298
		K <sub>2</sub>	$6,40 \cdot 10^{-5}$	298
malonzuur	CH <sub>2</sub> (COOH) <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	$1,49 \cdot 10^{-3}$	298
		K <sub>2</sub>	$2,03 \cdot 10^{-6}$	298
barnsteenzuur	(CH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> (COOH) <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	$6,89 \cdot 10^{-5}$	298
		K <sub>2</sub>	$2,47 \cdot 10^{-6}$	298
glutaarzuur	(CH <sub>2</sub> ) <sub>3</sub> (COOH) <sub>2</sub>	K <sub>1</sub>	$4,58 \cdot 10^{-5}$	298
		K <sub>2</sub>	$3,89 \cdot 10^{-6}$	298
maleïnezuur	HOOC—C=C—COOH (cis)	K <sub>1</sub>	$1,42 \cdot 10^{-2}$	298
		K <sub>2</sub>	$8,57 \cdot 10^{-7}$	298
fumaarzuur	HOOC—C=C—COOH (trans)	K <sub>1</sub>	$9,30 \cdot 10^{-4}$	291
		K <sub>2</sub>	$3,62 \cdot 10^{-5}$	291
citroenzuur		K <sub>1</sub>	$7,10 \cdot 10^{-4}$	291
		K <sub>2</sub>	$1,68 \cdot 10^{-5}$	291
		K <sub>3</sub>	$6,4 \cdot 10^{-6}$	291
caprylzuur	CH <sub>3</sub> (CH <sub>2</sub> ) <sub>6</sub> COOH		$1,28 \cdot 10^{-5}$	298

$K_1, K_2, K_3$  = dissociatie-constante 1e, 2e resp. 3e stap.

Tabel 2.7 Zuur-en baseconstanten (298 K; water als oplosmiddel) [kmol/m<sup>3</sup>] (zie ook *par. 1.2*)

zuur	zuur-constante	base	base-constante
HClO <sub>4</sub>	≥ 1	ClO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
HI	≥ 1	I <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
HBr	≥ 1	Br <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
HCl	≥ 1	Cl <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	≥ 1	HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
HNO <sub>3</sub>	≥ 1	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
HClO <sub>3</sub>	≥ 1	ClO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	≤ 10 <sup>-14</sup>
H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>		H <sub>2</sub> O	
CCl <sub>3</sub> COOH	2,3 · 10 <sup>-1</sup>	CCl <sub>3</sub> COO <sup>-</sup>	4,4 · 10 <sup>-14</sup>
HIO <sub>3</sub>	1,7 · 10 <sup>-1</sup>	IO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	5,9 · 10 <sup>-14</sup>
H <sub>2</sub> C <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	6,5 · 10 <sup>-2</sup>	HC <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>-</sup>	1,6 · 10 <sup>-13</sup>
CHCl <sub>2</sub> COOH	5,0 · 10 <sup>-2</sup>	CHCl <sub>2</sub> COO <sup>-</sup>	2,0 · 10 <sup>-13</sup>
SO <sub>2</sub> + H <sub>2</sub> O(H <sub>2</sub> SO <sub>3</sub> )	1,7 · 10 <sup>-2</sup>	HSO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	5,9 · 10 <sup>-13</sup>
H <sub>3</sub> PO <sub>3</sub>	1,6 · 10 <sup>-2</sup>	H <sub>2</sub> PO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	6,3 · 10 <sup>-13</sup>
HSO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	1,2 · 10 <sup>-2</sup>	SO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	8,3 · 10 <sup>-13</sup>
HClO <sub>2</sub>	1,1 · 10 <sup>-2</sup>	ClO <sub>2</sub> <sup>-</sup>	9,1 · 10 <sup>-13</sup>
H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	7,1 · 10 <sup>-3</sup>	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	1,4 · 10 <sup>-12</sup>
Fe(H <sub>2</sub> O) <sub>6</sub> <sup>3+</sup>	5,9 · 10 <sup>-3</sup>	FeOH(H <sub>2</sub> O) <sub>5</sub> <sup>2+</sup>	1,7 · 10 <sup>-12</sup>
H <sub>3</sub> AsO <sub>4</sub>	5,0 · 10 <sup>-3</sup>	H <sub>2</sub> AsO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	2,0 · 10 <sup>-12</sup>
NH <sub>3</sub> <sup>+</sup> CH <sub>2</sub> COOH	4,0 · 10 <sup>-3</sup>	NH <sub>3</sub> <sup>+</sup> CH <sub>2</sub> COO <sup>-</sup>	2,5 · 10 <sup>-12</sup>
H <sub>2</sub> Te	2,3 · 10 <sup>-3</sup>	HTe <sup>-</sup>	4,4 · 10 <sup>-12</sup>
CH <sub>3</sub> CHClCOOH	1,5 · 10 <sup>-3</sup>	CH <sub>3</sub> CHClCOO <sup>-</sup>	6,6 · 10 <sup>-12</sup>
CH <sub>2</sub> ClCOOH	1,3 · 10 <sup>-3</sup>	CH <sub>2</sub> ClCOO <sup>-</sup>	7,8 · 10 <sup>-12</sup>
CH <sub>2</sub> ClCH <sub>2</sub> COOH	1,1 · 10 <sup>-3</sup>	CH <sub>2</sub> ClCH <sub>2</sub> COO <sup>-</sup>	9,1 · 10 <sup>-12</sup>
HF	7,2 · 10 <sup>-4</sup>	F <sup>-</sup>	1,4 · 10 <sup>-11</sup>
HNO <sub>2</sub>	4,7 · 10 <sup>-4</sup>	NO <sub>2</sub> <sup>-</sup>	2,1 · 10 <sup>-11</sup>
H <sub>2</sub> Se	1,7 · 10 <sup>-4</sup>	HSe <sup>-</sup>	5,9 · 10 <sup>-11</sup>
HCOOH	1,6 · 10 <sup>-4</sup>	HCOO <sup>-</sup>	6,3 · 10 <sup>-11</sup>
Cr(H <sub>2</sub> O) <sub>6</sub> <sup>3+</sup>	1,5 · 10 <sup>-4</sup>	CrOH(H <sub>2</sub> O) <sub>5</sub> <sup>2+</sup>	6,6 · 10 <sup>-11</sup>
C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COOH	6,3 · 10 <sup>-5</sup>	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COO <sup>-</sup>	1,6 · 10 <sup>-10</sup>
HC <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>-</sup>	6,2 · 10 <sup>-5</sup>	C <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	1,6 · 10 <sup>-10</sup>
C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> NH <sub>3</sub> <sup>+</sup>	2,0 · 10 <sup>-5</sup>	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> NH <sub>2</sub>	5,0 · 10 <sup>-10</sup>
CH <sub>3</sub> COOH	1,7 · 10 <sup>-5</sup>	CH <sub>3</sub> COO <sup>-</sup>	5,9 · 10 <sup>-10</sup>
Al(H <sub>2</sub> O) <sub>6</sub> <sup>3+</sup>	1,4 · 10 <sup>-5</sup>	AlOH(H <sub>2</sub> O) <sub>5</sub> <sup>2+</sup>	7,1 · 10 <sup>-10</sup>



Tabel 2.7 (vervolg)

zuur	zuur-constante	base	base-constante
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COOH}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COO}^-$	$7,8 \cdot 10^{-10}$
$\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}(\text{H}_2\text{CO}_3)$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	$\text{HCO}_3^-$	$2,3 \cdot 10^{-8}$
$\text{H}_2\text{S}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$\text{HS}^-$	$3,3 \cdot 10^{-8}$
$\text{H}_2\text{PO}_4^-$	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$\text{HPO}_4^{2-}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
$\text{HSO}_3^-$	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$\text{SO}_3^{2-}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
$\text{HClO}$	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$\text{ClO}^-$	$3,1 \cdot 10^{-7}$
$\text{Pb}(\text{H}_2\text{O})_n^{2+}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$\text{PbOH}(\text{H}_2\text{O})_{n-1}^+$	$6,3 \cdot 10^{-7}$
$\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_4^{2+}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$\text{CuOH}(\text{H}_2\text{O})_3^+$	$1,0 \cdot 10^{-6}$
$\text{HBrO}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	$\text{BrO}^-$	$4,8 \cdot 10^{-6}$
$\text{H}_3\text{AsO}_3$	$6,0 \cdot 10^{-10}$	$\text{H}_2\text{AsO}_3^-$	$1,7 \cdot 10^{-5}$
$\text{NH}_4^+$	$5,8 \cdot 10^{-10}$	$\text{NH}_3$	$1,8 \cdot 10^{-5}$
$\text{HCN}$	$4,9 \cdot 10^{-10}$	$\text{CN}^-$	$2,1 \cdot 10^{-5}$
$\text{Zn}(\text{H}_2\text{O})_4^{2+}$	$2,2 \cdot 10^{-10}$	$\text{ZnOH}(\text{H}_2\text{O})_3^+$	$4,6 \cdot 10^{-5}$
$\text{NH}_3^+\text{CH}_2\text{COO}^-$	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$\text{NH}_2\text{CH}_2\text{COO}^-$	$6,3 \cdot 10^{-5}$
$\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}$	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\text{C}_6\text{H}_5\text{O}^-$	$7,8 \cdot 10^{-5}$
$\text{HCO}_3^-$	$5,6 \cdot 10^{-11}$	$\text{CO}_3^{2-}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
$\text{CH}_3\text{NH}_3^+$	$2,3 \cdot 10^{-11}$	$\text{CH}_3\text{NH}_2$	$4,4 \cdot 10^{-4}$
$\text{HIO}$	$1,8 \cdot 10^{-11}$	$\text{IO}^-$	$5,5 \cdot 10^{-4}$
$\text{H}_2\text{O}_2$	$2,4 \cdot 10^{-12}$	$\text{HO}_2^-$	$4,9 \cdot 10^{-3}$
$\text{HPO}_4^{2-}$	$4,8 \cdot 10^{-13}$	$\text{PO}_4^{3-}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$
$\text{HS}^-$	$1,2 \cdot 10^{-13}$	$\text{S}^{2-}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$
$\text{H}_2\text{O}$		$\text{OH}^-$	
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	$\ll 10^{-14}$	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{O}^-$	$\gg 1$
$\text{NH}_3$	$\ll 10^{-14}$	$\text{NH}_2^-$	$\gg 1$
$\text{OH}^-$	$\ll 10^{-14}$	$\text{O}^{2-}$	$\gg 1$
$\text{H}_2$	$\ll 10^{-14}$	$\text{H}^-$	$\gg 1$

Tabel 2.8 Zuur- en base-indicatoren

indicator	omslagtrajecten [pH]	kleuromslag (lage pH → hoge pH)
kresolrood <sup>1)</sup>	0,2–1,8	rood-geel
thymolblauw <sup>1)</sup>	1,2–2,8	rood-geel
<i>m</i> -kresolpurper <sup>1)</sup>	0,5–2,5	rood-geel
dimethylgeel	2,9–4,0	rood-geel
broomfenolblauw	3,0–4,6	geel-blauw
kongorood	3,0–5,2	blauwviolet-rood
methyloranje	3,1–4,4	rood-geel
broomkresolgroen	3,8–5,4	geel-blauw
broomkresolblauw	4,0–5,6	geel-blauw
methylrood	4,2–6,3	rood-geel
lakmoes	5,0–8,0	rood-blauw
broomkresolpurper	5,2–6,8	geel-purperrood
broomthymolblauw	6,0–7,6	geel-blauw
fenolrood	6,8–8,4	geel-rood
kresolrood <sup>1)</sup>	7,2–8,8	geel-purperrood
kresolroodnaftolftaleïne ( $\alpha$ naftolftaleïne)	7,3–8,7	geelrose-blauw
<i>m</i> -kresolpurper <sup>1)</sup>	7,6–9,6	geel-purper
thymolblauw <sup>1)</sup>	8,0–9,6	geel-blauw
fenolftaleïne	8,2–10,0	kleurloos-rood
thymolftaleïne	9,3–10,5	kleurloos-blauw
alizariengeel-R	10,0–12,1	geel-lila
nitramine	11,0–13,0	kleurloos-oranjebruin

<sup>1)</sup> Twee omslagtrajecten.

Tabel 2.9 Gehalte en dichtheid van oplossingen bij 293 K

gehalte [massa – %]	dichtheid [kg/m <sup>3</sup> ]								
	HCl	HNO <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	CH <sub>3</sub> COOH	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	NH <sub>3</sub>	NaOH	KOH	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH
1	1003,2	1003,6	1005,1	999,6	1003,6	994	1009,5	1008,3	996,3
5	1023,0	1025,6	1031,7	1005,5	1025,4	977	1053,8	1045,2	989,3
10	1047,4	1054,3	1066,1	1012,5	1053,2	957	1108,9	1098,3	981,9
15	1072,5	1084,2	1102,0	1019,5	1082,5	940	1164,0	1139,9	975,2
20	1098,0	1115,0	1139,4	1026,3	1113,4	923	1219,1	1188,4	968,7
25	1123,9	1146,9	1178,3	1032,6	1146,1	907	1273,8	1238,7	961,7
30	1149,3	1180,0	1218,5	1038,4	1180,5	892	1327,9	1290,4	953,9
35	1174,0	1214,0	1259,9	1043,8	1216		1379,9	1344,0	944,9
40	1198,0	1246,3	1308,2	1048,8	1254		1430,0	1399,1	935,2
45		1278,3	1347,6	1053,4	1293		1478,0	1455,8	924,8
50		1310,0	1395,1	1057,5	1335		1525,3	1514,3	913,9
55		1339,3	1445,3	1061,1	1379				902,7
60		1366,7	1498,3	1064,2	1426				891,1
65		1391,3	1553,3	1066,6	1475				879,5
70		1413,4	1610,5	1068,5	1526				876,6
75		1433,7	1669,2	1069,6	1579				855,7
80		1452,1	1727,2	1070,0	1633				843,6
85		1468,6	1778,6	1068,9	1689				831,0
90		1482,6	1814,4	1066,1	1746				818,0
95		1493,2	1833,7	1060,5	1806				804,2
100		1512,9	1830,5	1049,8	1870				789,3

*Tabel 2.10 Concentraties van in de handel zijnde zuren*

zuur	gehalte [massa-%]	dichtheid bij 293 K [kg/m <sup>3</sup> ]	molariteit [M]
mierenzuur	98–100	1220	26
azijnzuur (ijsazijn)	99–100	1060	17
azijnzuur verd.	30	1040	5
fosforzuur	89	1750	16
fosforzuur	85	1690	15
zoutzuur	36	1180	12
zoutzuur	32	1160	10
salpeterzuur	65	1400	14
salpeterzuur, rokend	86	1500	20
salpeterzuur, verdund	25	1150	5
zwavelzuur conc.	95–97	1840	18
zwavelzuur, verd.	16	1110	2
zwavelzuur, rokend ca. 65% SO <sub>3</sub>		1990	–

Tabel 2.11 Normaal redoxpotentialen [V]

oxidator		reductor	normaal- potentiaal
$\text{Li}^+ + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Li(s)}$	-3,05
$\text{K}^+ + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{K(s)}$	-2,92
$\text{Ba}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ba(s)}$	-2,90
$\text{Ca}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ca(s)}$	-2,76
$\text{Na}^+ + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Na(s)}$	-2,71
$\text{Al(OH)}_4^- + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Al(s)} + 4\text{OH}^-$	-2,35
$\text{Mg}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Mg(s)}$	-2,38
$\text{Al}^{3+} + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Al(s)}$	-1,67
$\text{Zn(OH)}_4^{2-} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Zn(s)} + 4\text{OH}^-$	-1,22
$\text{HSO}_4^- + \text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{SO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O}$	-0,90
$2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2(\text{g}) + 2\text{OH}^-$	-0,83
$\text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Zn(s)}$	-0,76
$\text{Cr}^{3+} + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cr(s)}$	-0,74
$2\text{CO}_2(\text{g}) + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$	-0,49
$\text{S(s)} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{S}^{2-}$	-0,51
$\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Fe(s)}$	-0,41
$\text{Co}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Co(s)}$	-0,28
$\text{Ni}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ni(s)}$	-0,23
$\text{Sn}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Sn(s)}$	-0,14
$\text{Pb}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Pb(s)}$	-0,13
$2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2(\text{g})$	0,00
$\text{HCOOH} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2\text{CO} + \text{H}_2\text{O}$	+0,06
$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	+0,10
$\text{S(s)} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2\text{S}$	+0,14
$\text{Sn}^{4+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Sn}^{2+}$	+0,15
$\text{Cu}^{2+} + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cu}^+$	+0,16
$\text{HSO}_4^- + 3\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{SO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	+0,20
$\text{AgCl(s)} + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ag(s)} + \text{Cl}^-$	+0,22
$\text{Hg}_2\text{Cl}_2(\text{s}) + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{Hg(l)} + 2\text{Cl}^-$	+0,27
$\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cu(s)}$	+0,34
$\text{Fe(CN)}_6^{3-} + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Fe(CN)}_6^{4-}$	+0,36
$\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$4\text{OH}^-$	+0,40
$\text{Cu}^+ + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cu(s)}$	+0,52
$\text{I}_2 + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{I}^-$	+0,53
$\text{MnO}_4^- + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{MnO}_4^{2-}$	+0,56

Tabel 2.11 (vervolg)

oxidator		reductor	normaal- potentiaal
$\text{MnO}_4^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{MnO}_2(\text{s}) + 4\text{OH}^-$	+0,58
$\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2\text{O}_2$	+0,68
$\text{Fe}^{3+} + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Fe}^{2+}$	+0,77
$\text{Hg}_2^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{Hg}(\text{l})$	+0,80
$\text{Ag}^+ + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ag}(\text{s})$	+0,80
$\text{NO}_3^- + 2\text{H}^+ + \text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{NO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}$	+0,81
$\text{Hg}^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Hg}(\text{l})$	+0,85
$2\text{Hg}_2^{2+} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Hg}_2^{2+}$	+0,91
$\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{OH}^-$	+0,94
$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{NO}(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}$	+0,96
$\text{AuCl}_4^- + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Au}(\text{s}) + 4\text{Cl}^-$	+1,00
$\text{Br}_2(\text{l}) + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{Br}^-$	+1,07
$\text{O}_2(\text{g}) + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{H}_2\text{O}$	+1,23
$\text{MnO}_2(\text{s}) + 4\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	+1,21
$\text{O}_3(\text{g}) + \text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{OH}^-$	+1,24
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	+1,33
$\text{Cl}_2 + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{Cl}^-$	+1,36
$\text{ClO}_3 + 6\text{H}^+ + 6\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cl}^- + 3\text{H}_2\text{O}$	+1,45
$\text{Au}^{3+} + 3\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Au}(\text{s})$	+1,50
$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	+1,52
$2\text{HClO} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	+1,63
$\text{PbO}_2(\text{s}) + \text{HSO}_4^- + 3\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{PbSO}_4(\text{s}) + 2\text{H}_2\text{O}$	+1,69
$\text{H}_2\text{O} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{H}_2\text{O}$	+1,77
$\text{O}_3(\text{g}) + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{O}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}$	+2,07
$\text{F}_2(\text{g}) + 2\text{e}^-$	$\rightleftharpoons$	$2\text{F}^-$	+2,87

De reacties vinden plaats in oplossing; alle ionen zijn gehydrateerd. De concentraties van de opgeloste deeltjes zijn steeds  $1,00 \text{ mol/dm}^{-3}$ ;  $T = 298 \text{ K}$ .

*Tabel 2.12 Redoxindicatoren*

indicator	omslagpotentiaal [ $E^\circ$ volt] (pH 7; 293 K)	kleuromslag
neutraalrood 'Merck' (toluyleenrood)		
amidodimethylaminotolu- aminozine-HCl	-0,32	rood-kleurloos
methyleenblauw 'Merck' methylthioninchloride	0,01	blauw-kleurloos
thionine 3,7-diaminophenothia- zoniumchloride	0,06	violet-kleurloos
variamineblauw 'Merck' 4-amino-4 methoxydiphe- nylamine	0,60	blauw-kleurloos
diphenylamine $C_{12}H_{11}N$	0,76	blauw-kleurloos
diphenylaminsulfonzuur	0,83	violet-kleurloos
ferroin 'Merck' O-phenanthroline	1,06	rood-bleekblauw

Bron: Merck, Hilfstabellen für das chem. Laboratorium.

*Tabel 2.13 Constanten voor molaire vriespuntsdaling en kookpuntsverhoging van enkele oplosmiddelen*

oplosmiddel	smeltpunt [K]	molaire vriespunts- daling [10 <sup>3</sup> kg·K/kmol]	kookpunt [K]	molaire kookpunts- verhoging [10 <sup>3</sup> kg·K/kmol]
aceton			329,35	1,71
azijnzuur	289,78	3,90	391,05	3,07
benzeen	278,68	4,90	353,25	2,64
chloroform			334,85	3,63
cyclohexaan			353,89	2,79
ethanol			351,65	1,04
ether	157,0	1,8	307,70	1,83
fenol	314,05	7,40	454,98	3,56
<i>n</i> -hexaan			342,10	2,75
kamfer	452,7	40,0	481	6,0
methanol			338,11	0,83
naftaleen	353,60	6,87	491,15	5,80
tetra			349,69	4,88
tolueen			383,75	3,35
water	273,15	1,86	373,15	0,51

*Tabel 2.14 Calorische boven- en onderwaarden van enkele gassoorten (bij 1,0135 bar, 298,15 K)*

gassoort	calorische waarde [MJ/m <sup>3</sup> ]	
	bovenwaarde	onderwaarde
aardgas (Slochteren)	35,103	31,678
methaan	39,816	35,882
ethaan	70,305	64,353
propaan	101,234	93,207
butaan	133,691	123,466

Bron: *Basisgegevens Aardgassen*, 1980, N.V. Nederlandse Gasunie



Tabel 2.15 Equivalent geleidingsvermogen van ionen in water ( $T = 298 \text{ K}$ )

positief ion	equivalent geleidingsvermogen [ $10^{-3} \cdot \text{m}^2 / (\Omega \cdot \text{mol})$ ]	negatief ion	equivalent geleidingsvermogen [ $10^{-3} \cdot \text{m}^2 / (\Omega \cdot \text{mol})$ ]
$\text{H}^+$	3498	$\text{OH}^-$	1983
$\text{Li}^+$	387	$\text{F}^-$	554
$\text{Na}^+$	501	$\text{Cl}^-$	764
$\text{K}^+$	735	$\text{Br}^-$	781
$\frac{1}{2} \text{Mg}^{2+}$	531	$\text{I}^-$	768
$\frac{1}{2} \text{Ca}^{2+}$	595	$\text{NO}_3^-$	714
$\frac{1}{2} \text{Ni}^{2+}$	530	$\frac{1}{2} \text{SO}_4^{2-}$	798
$\frac{1}{2} \text{Cu}^{2+}$	536	$\frac{1}{3} \text{PO}_4^{3-}$	800
$\frac{1}{2} \text{Zn}^{2+}$	528	$\frac{1}{2} \text{CO}_3^{2-}$	593
$\frac{1}{2} \text{Fe}^{2+}$	540	$\text{HCO}_3^-$	445
$\text{Ag}^+$	635	$\text{HSO}_4^-$	520
$\frac{1}{3} \text{Al}^{3+}$	630	$\text{HCOO}^-$	546
$\frac{1}{3} \text{Fe}^{3+}$	684	$\text{CN}^-$	820
$\frac{1}{2} \text{Pb}^{2+}$	594	$\frac{1}{4} \text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$	1105
$\text{NH}_4^+$	734	$\frac{1}{3} \text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$	1010
$\frac{1}{2} \text{Ba}^{2+}$	636	$\text{MnO}_4^-$	610
		$\text{CH}_2\text{CO}_2^-$	410

Het equivalent geleidingsvermogen  $A_0$  is de limietwaarde van het equivalent geleidingsvermogen  $A$  bij oneindige verdunning.

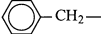
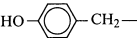
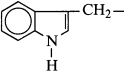
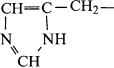
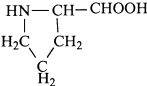
Het equivalent geleidingsvermogen  $A$  is gedefinieerd als het quotiënt van het specifieke geleidingsvermogen  $\kappa$  [ $1/(\Omega \cdot \text{m})$ ] en de concentratie van het opgeloste elektrolyt [ $\text{mol}/\text{m}^3$ ].

## 2.4 Diversen

Tabel 2.16 Aminozuren

$  \begin{array}{c}  \text{NH}_2 \\    \\  \text{R}-\text{C}-\text{COOH} \\    \\  \text{H} \\  \downarrow  \end{array}  $	naam	afkorting	iso- elektrisch punt [pH]
H-	glycine	Gly	6,0
CH <sub>3</sub> -	alanine	Ala	6,0
$  \begin{array}{c}  \text{H}_3\text{C} \\  \diagdown \\  \text{CH}- \\  \diagup \\  \text{H}_3\text{C}  \end{array}  $	valine	Val	6,0
$  \begin{array}{c}  \text{H}_3\text{C} \\  \diagdown \\  \text{CH}-\text{CH}_2- \\  \diagup \\  \text{H}_3\text{C}  \end{array}  $	leucine	Leu	6,0
$  \begin{array}{c}  \text{H}_3\text{C} \\  \diagdown \\  \text{CH}- \\  \diagup \\  \text{CH}_3-\text{CH}_2-  \end{array}  $	isoleucine	Ile	6,0
HO-CH <sub>2</sub> -	serine	Ser	5,7
$  \begin{array}{c}  \text{CH}_3-\text{CH}- \\    \\  \text{OH}  \end{array}  $	threonine	Thr	5,6
HOOC-CH <sub>2</sub> -	asparaginezuur	Asp	2,8
HOOC-CH <sub>2</sub> -CH <sub>2</sub> -	glutaminezuur	Glu	3,2
$  \begin{array}{c}  \text{O} \\     \\  \text{H}_2\text{N}-\text{C}-\text{CH}_2-  \end{array}  $	asparagine	Asn	5,4
$  \begin{array}{c}  \text{O} \\     \\  \text{H}_2\text{N}-\text{C}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-  \end{array}  $	glutamine	Gln	5,7
H <sub>2</sub> N-CH <sub>2</sub> -CH <sub>2</sub> -CH <sub>2</sub> -CH <sub>2</sub> -	lysine	Lys	9,6
$  \begin{array}{c}  \text{H} \\    \\  \text{H}_2\text{N}-\text{C}-\text{N}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2- \\     \\  \text{NH}  \end{array}  $	arginine	Arg	11,2

Tabel 2.16 (vervolg)

$  \begin{array}{c}  \text{NH}_2 \\    \\  \text{R}-\text{C}-\text{COOH} \\    \\  \text{H} \\  \downarrow  \end{array}  $	naam	afkorting	iso-elektrisch punt [pH]
$\text{HS}-\text{CH}_2-$	cysteine	Cys	5,1
$\text{H}_3\text{C}-\text{S}-\text{CH}_2-\text{CH}_2$	methionine	Met	5,7
	phenylalanine	Phe	5,5
	tyrosine	Tyr	5,7
	tryptofaan	Trp	5,9
	histidine	His	7,5
	proline	Pro	6,3

Tabel 2.17 Dipoolmomenten van moleculen in de gasfase (zie ook par. 1.1)

molecuul	naam	dipool- moment [ $10^{-30}\text{Cm}$ ]	molecuul	naam	dipool- moment [ $10^{-30}\text{Cm}$ ]
AgCl	zilverchloride	19,1	CH <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	mierezuur	4,70
BF <sub>3</sub>	boortrifluoride	0	CH <sub>3</sub> Cl	chloromethaan	6,24
HBr	waterstofbromide	2,74	CH <sub>4</sub> O	methanol	5,67
HCl	waterstofchloride	3,60	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	acetyleen	0
KCl	kaliunchloride	34,3	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	ethyleen	0
NaCl	natriumchloride	30,0	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O	acetaldehyde	8,97
SiCl <sub>4</sub>	siliciumtetrachloride	0	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub>	azijnzuur	5,80
HF	waterstoffluoride	6,07	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> Cl	chloroethaan	8,34
SF <sub>6</sub>	zwavelhexafluoride	0	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	ethaan	0
HI	waterstofiodide	1,47	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O	ethanol	5,64
H <sub>2</sub> O	water	6,17	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O <sub>2</sub>	ethyleenglycol	7,61
H <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	waterstofperoxide	7,34	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	proppeen	1,22
H <sub>2</sub> S	waterstofsulfide	3,24	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O	aceton	9,61
NH <sub>3</sub>	ammonia	4,90	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	propanaan	0,28
NO	stikstofmonoxide	0,51	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O	propanol-1	5,60
NO <sub>2</sub>	stikstofdioxide	1,05	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O	propanol-2	5,54
N <sub>2</sub> O	distikstofoxide	0,56	C <sub>4</sub> H <sub>4</sub> O	furaan	2,20
SO <sub>2</sub>	zwaveldioxide	5,44	C <sub>4</sub> H <sub>6</sub>	butadieen-1,3	0
SO <sub>3</sub>	zwaveltrioxide	0	C <sub>4</sub> H <sub>8</sub>	buteen-1	1,13
CCl <sub>4</sub>	tetrachloorkoolstof	0	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	butaan	<0,17
CO	koolmonoxide	0,37	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> O	butanol	5,54
CO <sub>2</sub>	kooldioxide	0	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> O	diethylether	3,84
CS	zwavelkoolstof	6,60	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> Cl	chlorobenzeen	5,64
CHClF <sub>2</sub>	chlorodifluoromethaan	4,74	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	benzeen	0
CHCl <sub>3</sub>	chloroform	3,37	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> O	fenol	4,84
HCN	waterstofcyanide	9,94	C <sub>7</sub> H <sub>8</sub>	tolueen	1,20
CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	dichloromethaan	5,34			

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

• a .....	15, 20	Asb.....	15
Å .....	15	Associatief .....	38
Aangeschreven cirkel.....	57, 69	Asymptoten.....	76
Aangevulde matrix.....	108	at .....	15
Aanzwengeling .....	7	atm .....	15
Abel		Atmosfeer .....	15
theorema's van -.....	98	Atomaire verschijnselen .....	14
Abscis .....	52	Atoom .....	243
Absolute fout .....	35	-gewicht .....	12
Absolute waarde .....	32	-massa .....	243, 253
Absorptiecoëfficiënt (spectrale -).....	13	-massa (relatieve -) .....	12
Absorptiefactor (spectrale -) .....	13	-massaconstante .....	123
Acceptatiehoek.....	196	-nummer.....	12, 243, 253
acre.....	17	-straal .....	253
Acre .....	17	Atoomnummer.....	14
Activeringsenergie .....	249	Atto .....	20
Activiteit .....	14	Avogadro	
Adhesie .....	127	constante van - .....	123, 243
Adiabatisch .....	139	wet van - .....	129
Admittantie			
elektrische - .....	9, 207		
AE.....	15		
Afgeleide.....	35		
partiële - .....	36		
Afgeleide functies .....	78		
Afhankelijkheid			
lineaire - .....	106		
Afronden .....	51		
Afschuiving.....	8		
Afschuivingsmodulus .....	8		
Afvoercoëfficiënt .....	161		
Aggregatietoestand .....	135		
Ah .....	15		
Akoestiek .....	182		
Alfa .....	28		
Algebra .....	38		
lineaire - .....	103		
Algemene oplossing (AO) .....	82		
Aminozuren .....	274		
Ampère .....	3		
-uur.....	15		
wet van - .....	214		
Amplitude			
-niveaoverschil.....	124		
-spectrum .....	94, 96		
Ångström .....	15		
Anorganische stoffen .....	255		
Apertuur			
numerieke - .....	194		
Apostilb.....	15		
Appendages			
verliezen in - .....	156		
Arbeid .....	7		
Arbeidsfactor .....	9, 210		
Arcfuncties.....	67		
Archimedes			
wet van - .....	128		
Are .....	15		
Argument .....	36, 49		

A  
**B**  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

- B .....5
- bar .....15
- Bar .....15
- Barrel .....17
- dry - .....17
- Baseconstanten .....249, 264
- Base-indicatoren .....266
- Basis .....84
- Basisgrootheden .....3
- bbl .....17
- Becquerel .....5
- Beginwaarde-theorema .....99
- Bel .....5
- Belichting .....13, 200
- Bepaalde integraal .....89
- Bereik .....34
- Bernoulli
  - differentiaalvergelijking van - .....84
  - wet van - .....147
- Bestralingssterkte .....13
- Bêta .....28
- Beweging
  - hoeveelheid van - .....7
- B-H-kromme .....220
- Bi .....15
- Bicyclische vierhoek .....70
- Bijzondere oplossing .....84
- Binnenbissectrices .....69
- Binomiaal-coëfficiënten .....40
- Binomiaal-vergelijking .....43
- Binomium van Newton .....40
- Biot .....15
- Biot en Savart
  - wet van - .....215
- Bissectrice .....53
- Blindvermogen .....9, 210
- Bochtverliezen .....156
- Bol .....62
- condensator .....203
- driehoeksmeting .....70
- schijf .....62
- sector .....62
- segment .....62
- Boltzmann
  - constante van - .....123
- Boog .....35
- functies .....67
- Borium-ferriet .....219
- Boventoon .....180
- Boyle-Gay Lussac .....130
- Bq .....5
- Brandpunt .....75, 192
- Breedte .....6
- Breking .....190
- Brekingsindex .....13, 191
- Breuken .....38
- Briggse logaritmen .....39
- British thermal unit .....18
- Brutoformule .....244
- Btu .....18

- bu .....17
- Buiging .....194
- Buigpunt .....81
- Buik .....180
- Buiten
  - bissectrices .....69
- Buizen
  - stroming door (cilindrische) - .....150
- Bushel .....17

<b>A</b>				
<b>B</b>				
<b>C</b>	● c	20	Compliantie	8, 175
<b>D</b>	C	5	Compressibiliteit	6, 8, 126
<b>E</b>	c/s	18	Compressibiliteitsfactor	8
<b>F</b>	Cagnoli	73	Compressiemodulus	8, 126
<b>G</b>	cal.	15	Condensatiewarmte	
<b>H</b>	Calorie	15	soortelijke -	136
<b>I</b>	Calorische		Condensator	203
<b>J</b>	- bovenwaarde	272	Condenseren	136
<b>K</b>	- onderwaarde	272	Conductantie	9
<b>L</b>	Candela	4	Conductiviteit	9
<b>M</b>	Capaciteit (elektrische)	9, 203	Congruent	34
<b>N</b>	Capillair	127	Contact	
<b>O</b>	Carbonaten	261	-hoek	127
<b>P</b>	Carnot-proces	140	-potentiaal	222
<b>Q</b>	Cartesiaans stelsel	112	-potentiaalverschil	223
<b>R</b>	Cartesisch product	34	Continuïteitsbetrekking	146
<b>S</b>	Cartesische coördinaten	52	Contractiecoëfficiënt	148, 156
<b>T</b>	cd	4	Convectie	
<b>U</b>	Celsius		gedwongen -	166
<b>V</b>	-temperatuur	11, 133	vrije -	165
<b>W</b>	Centi	20	Convergent	91
<b>X</b>	Ceva		Convolutie	32
<b>Y</b>	stelling van -	73	Coördinaten	35, 52
<b>Z</b>	Chemische		Corrector	119
	- formule	244	Cosecans	65
	- reactie	246	Cosinus	65
	- stof	12	Cosinusregel	68, 71
	Chi	28	Cotangens	65
	Chromaten	262	Coulomb	5
	Ci	15	wet van -	214
	CIE	198	Covalente binding	246
	Cilinder (wiskunde)	61	Cramer	
	Cilindrische		regel van -	108
	wand (warmtetransport door -)	163	ct	15
	cir in	17	Curie	15
	Circulatie	8, 151	Curie-temperatuur	219
	Cirkel	35, 56, 59, 74	cwt	
	-frequentie	6, 175	(UK) -	17
	-kegel	61	sh -	17
	-repetentie	6	Cycle per second	18
	Clapeyron		Cyclometrische functies	67
	wet van -	143		
	Clausius			
	beginsel van -	138		
	Clausius-Clapeyron			
	betrekking van -	143		
	Coëfficiëntenmatrix	108		
	Coërcitiefkracht	220		
	Cohesie	127		
	Commission Internationale d'Eclairage	198		
	Commutatief	38		
	Complement	52		
	Complex(e)			
	- gereduceerd	49		
	- getallen	33, 49		
	- rekenwijze	49		
	- schrijfwijze (wisselstromen)	207		
	- spectrum	96		
	- voorstelling sinusvormige grootheden	50		
	toegevoegd -	36, 49		

<b>A</b>	• d .....	15, 20	Direct orthogonaal .....	105
<b>B</b>	da .....	20	Discriminant .....	42
<b>C</b>	Dag .....	15	Disjunct .....	32
<b>D</b>	Dalton		Dispersie .....	191
<b>E</b>	wet van - .....	131	Dissociatie-constanten .....	263
<b>F</b>	Damp .....	129	Dissociatie-graad .....	12
<b>G</b>	-lijn .....	139	Distributief .....	38
<b>H</b>	-spanningslijn .....	137	Distributiegetallen .....	198
<b>I</b>	-spanningstabel .....	226	Distributiekrommen	
<b>J</b>	Dauwpunt .....	132	spectrale - .....	198
<b>K</b>	Deca .....	20	Divergent .....	91
<b>L</b>	Deci .....	20	Divergentie .....	37, 113
<b>M</b>	Decibel .....	123	Dodecaëder .....	61
<b>N</b>	Decrescentie .....	6	Domein .....	34
<b>O</b>	Deelruimte		Doorsnede .....	32
<b>P</b>	lineaire - .....	105	Doorwarming .....	171
<b>Q</b>	Deeltjes		Doppler-effect .....	181
<b>R</b>	aantal elementaire - .....	12	Dosis	
<b>S</b>	-dichtheid .....	12	-equivalent .....	14
<b>T</b>	-snelheid, momentele .....	14	geabsorbeerde - .....	14
<b>U</b>	Deelverzameling .....	31	-tempo .....	14
<b>V</b>	Definitie .....	31	dpt .....	15
<b>W</b>	Delambre		Draagkracht .....	159, 222
<b>X</b>	formules van - .....	72	Draaiing .....	7, 35
<b>Y</b>	Delta .....	28	Draaistoot .....	7
<b>Z</b>	Demagnetiseringskromme .....	221	Draaistroom .....	210
	den .....	15	Drie-achtste regel .....	118
	Denier .....	15	Driehoek(s) .....	53, 58
	Desintegratieconstante .....	14	- ster-transformatie .....	211
	Determinant .....	37, 104	- van Pascal .....	41
	Deuteron		-meting .....	68
	rustmassa - .....	123	-schakeling .....	210
	Diagonaalmatrix .....	103	Druk .....	7
	Diamagnetisme .....	219	dynamische - .....	147
	Diameter .....	6	hydrostatische - .....	128, 147
	Dichtheid .....	7, 129	kritische - .....	137
	relatieve - .....	7, 129	osmotische - .....	12
	Diëlektrische constante .....	9, 202	-punt (Drukkingspunt) .....	129
	Diëlektrische verplaatsing .....	203	statische - .....	14, 147
	Dieselmotor .....	141	-weerstandcoëfficiënt .....	158
	Diesel-proces .....	141	-weerstandskracht .....	158
	Differentiaal .....	36	Dry barrel .....	17
	-quotiënt .....	78, 79	dry bbl .....	17
	-rekening .....	78	dry gal .....	17
	totale - .....	36, 81	Dry gallon .....	17
	-vergelijking (DV) .....	82, 84, 119	Dry pint .....	17
	-vergelijking, partiële .....	86	dry pt .....	17
	Differentiatie .....	99	dry qt .....	17
	numerieke - .....	117	Dry quart .....	17
	Differentie .....	35	Dwarscontractie-coëfficiënt .....	179
	Differentiequotiënt .....	78	dyn .....	15
	Diffusiecoëfficiënt .....	12	Dynamische viscositeit .....	126
	Dikte .....	6	Dyne .....	15
	Dilatante vloeistof .....	126		
	Dioptrie .....	15		
	Dipoolmoment .....	246		
	elektrisch - .....	9, 204, 246, 276		
	magnetisch - .....	9, 214		
	Dirac			
	constante van - .....	123		



<b>A</b>	• e .....	37	Ellipsoïde .....	62, 110
<b>B</b>	E .....	20	Elliptische integraal .....	59
<b>C</b>	Eckert .....	166	Emissiefactor .....	
<b>D</b>	Eenheden en symbolen .....	2	spectrale - .....	13
<b>E</b>	Amerikaanse (US) - .....	16	Emittantie (licht) .....	13
<b>F</b>	Engelse (UK) - .....	16	Emk .....	9
<b>G</b>	oude - .....	14	Endotherm .....	248
<b>H</b>	Eenheid(s) .....		Energie .....	7
<b>I</b>	astronomische - .....	15	-balans .....	147
<b>J</b>	-cirkel .....	64	-dichtheid .....	7, 147, 183
<b>K</b>	-impuls .....	100	elektrische - .....	9
<b>L</b>	-matrix .....	103	inwendige - .....	11, 138, 142
<b>M</b>	-vector .....	110	kinetische - .....	7, 147
<b>N</b>	Effectieve waarde .....	208, 210	magnetische - .....	9
<b>O</b>	Eigen .....		-niveaus .....	245
<b>P</b>	-frequentie .....	175	potentiële - .....	7, 147
<b>Q</b>	-vectoren .....	107	-stroom .....	7
<b>R</b>	-waarden .....	107	vrije - .....	11, 142, 248, 255
<b>S</b>	Eindwaarde-theorema .....	98, 99	wet van behoud van - .....	137
<b>T</b>	Elasticiteitsmodulus .....	8	wet van de ontarding van - .....	138
<b>U</b>	Elektriciteit .....	9	Engler .....	18
<b>V</b>	hoeveelheid - .....	9	Enthalpie .....	11, 142, 247, 255
<b>W</b>	Elektriciteitsleer .....	201	soortelijke - .....	11
<b>X</b>	Elektrisatie .....	9	vrije - .....	11, 142
<b>Y</b>	Elektrisch(e) .....	9	Entropie .....	11, 140, 248, 255
<b>Z</b>	-dipoolmoment .....	9	soortelijke - .....	11
	-energie .....	9	Epsilon .....	28
	-flux .....	9	Equal energy white .....	199
	-fluxdichtheid .....	9	Equi-energiespectrum .....	198
	-lading .....	9	erg .....	15
	-polarisatie .....	9	Erg .....	15
	-potentiaal .....	9	Êta .....	28
	-potentiaalverschil .....	9	Euler .....	
	-spanning .....	9	formule van - .....	118
	-stroom .....	9	formules van - .....	71
	-stroomdichtheid .....	9	methode van - .....	85
	-susceptibiliteit .....	9	methode van Heun en - .....	119
	-veldsterkte .....	9	stelling van - .....	49
	-vermogen .....	9	twee-puntsformule van - .....	117
	-verplaatsing .....	9	eV .....	15
	-weerstand .....	9	Evenwicht .....	128
	Elektro .....		reactie - .....	248
	-dynamica .....	205	Evenwichtsconstante .....	248
	-magnetisch veld .....	214	Evenwijdig .....	34
	-motorische kracht (emk) .....	9	Exa .....	20
	-negativiteit .....	246	Exacte differentiaalvergelijking .....	83
	-statica .....	202	Existentie-kwantor .....	37
	Elektron(en) .....	243	Exotherm .....	248
	-affiniteit .....	246	Explosie .....	250
	-configuratie .....	245, 253	Exponenten .....	38
	-paarbinding .....	246	Exponentiële functie .....	47
	rustmassa - .....	123	Exposie .....	14
	-volt .....	15	Exposietempo .....	14
	-wolk .....	245	Extremen .....	81
	Element .....	243, 251		
	Elementaire deeltjes .....			
	aantal - .....	12		
	Eliminatie-methode .....	42		
	- van Gauss .....	108		
	Ellips .....	59, 75		

● f.....	20
F.....	5
Faculteit .....	33
Fahrenheit .....	18
-temperatuur.....	133
Farad .....	5
Faraday	
constante van - .....	123
inductiewet van - .....	216
wet van - .....	218
Fase.....	6
-coëfficiënt .....	6
-snelheid.....	178
-spectrum .....	94, 96
Fasor .....	207
fath.....	16
Fathom .....	16
fc .....	18
Femto .....	20
Fermi.....	15
Ferrimagnetisme .....	219
Ferromagnetisme .....	219
Ferroxdur .....	219
Fi.....	28
fL .....	18
fl oz.....	17
Fluïditeit.....	8
Flux	
elektrische - .....	9, 203
magnetische - .....	9, 213
Fluxdichtheid .....	203
elektrische - .....	9
magnetische - .....	9
Fm.....	15
Fo.....	145
Foon .....	184
Foot.....	16
Foot candle.....	18
Foot lambert.....	18
Fosfaten.....	262
Fotometrie.....	200
Fourier	
-analyse .....	94
-getransformeerde .....	37
-kengetal .....	145
-reeks.....	94
-transformatie.....	95
Fouten	
absolute - .....	35, 51
relatieve - .....	35, 51
Fr.....	22, 145
Frequentie .....	6, 175
Frequentieverschuiving.....	99
Froude	
modelregel van - .....	162
Froude-kengetal .....	22, 145
ft.....	16
Functies.....	34, 46
Fundamenteel stelsel.....	84
fur.....	16

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

<b>A</b>	• G .....	20	Glasvezelkabel.....	196
<b>B</b>	gal .....	15	Glijdingsmodulus.....	8, 179
<b>C</b>	Gal .....	15	Golf	
<b>D</b>	(UK) - .....	17	-getal .....	6
<b>E</b>	(US) - .....	17	-lengte .....	6, 13
<b>F</b>	Gallon .....	17	-vormen.....	101
<b>G</b>	dry - .....	17	-weerstand.....	183
<b>H</b>	Galvani-spanning .....	223	gon .....	15
<b>I</b>	Gamma.....	15, 28	Goniometrie .....	64
<b>J</b>	Gas(sen) .....	125	Gr.....	145
<b>K</b>	constante (molaire -) .....	123, 130, 248	Graad .....	15, 35, 64
<b>L</b>	constante (specifieke -) .....	130	Graad DV.....	82
<b>M</b>	constante (universele -) .....	130	Gradiënt .....	37, 113
<b>N</b>	ideaal - .....	130	Gramatoom .....	15
<b>O</b>	-mechanica .....	8	Gramkracht .....	16
<b>P</b>	niet-ideale - .....	131	Grammolecuul .....	15
<b>Q</b>	-soorten .....	272	Grashof-kengetal.....	145
<b>R</b>	standaard - .....	130	Grat.....	15
<b>S</b>	-wet .....	130	Gravitatie	
<b>T</b>	Gauss .....	15	-constante .....	123
<b>U</b>	eliminatie-methode van - .....	108	-veldsterkte .....	7
<b>V</b>	methode van Seidel.....	120	Gray .....	5
<b>W</b>	stelling van - .....	114, 203	Grenshoek.....	191, 196
<b>X</b>	wet van - .....	218	Grensvlakspanning .....	126
<b>Y</b>	Gb .....	15	Griekse lettertekens .....	28
<b>Z</b>	Gedwongen convectie.....	167	Groepssnelheid .....	178
	Gehele getallen .....	33	grol.....	15
	Geleiding(s) .....	9	Grond	
	soortelijke - .....	10	-eenheden.....	3
	vermogen (equivalent -).....	273	-tal.....	34, 37
	Gelijk aan.....	31	-toon.....	180
	ongeveer - .....	31	Groter dan.....	31
	Gelijkvormig.....	31, 34	Gs.....	15
	Gelijkzijdige. driehoek.....	58	Gulden snede .....	55
	Geluid(s) .....	14, 174	Guldin	
	-absorptie .....	184	regels van - .....	63
	-absorptiecoëfficiënt .....	184	Gy .....	5
	-druk (momentele -) .....	182		
	druk (momentele -) .....	14		
	-drukniveau .....	14, 183		
	-energiedichtheid .....	14		
	-hinder.....	187		
	-intensiteit .....	14, 183		
	-intensiteitsniveau .....	14		
	-isolatie .....	185		
	-leer.....	182		
	-snelheid.....	14, 182		
	Gemiddelde waarde .....	208, 210		
	Geordend paar.....	33		
	Gereduceerde vergelijking .....	84		
	Gesloten interval.....	32		
	Gespiegeld orthogonaal .....	105		
	Getransponeerde matrix .....	103		
	Gewicht.....	7		
	moleculair - .....	12		
	Gibbs			
	- vrije energie .....	248		
	-functie .....	142		
	Giga .....	20		
	Gilbert.....	15		

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

● h	16, 20	Impedantie	9
H	5	akoestische -	14, 182
Hagen-Poiseuille		elektrische -	207
wet van -	150	mechanische -	14
Halogeniden	261	specifieke akoestische -	14
Halveringstijd	14	Impuls	7
Hard-ferromagnetische materialen	219	-moment	7
Harmonische(n)	101	-momentstroom	8
- rijen	43	-stroom	8
- trilling	175	in	16
Hecto	20	Inch	16
Helderheid	200	circular -	17
Helling grafiek	78	Indringdiepte	170
Helmholtz-functie	142	Inductantie	9
Henry	5	Inductie	
Herleidingsfactoren	19	magnetische -	9, 213
Hertz	5	mutuele -	217
Heteluchtmotor	141	wederzijdse -	10
Heun		-wet van Faraday	216
methode van Euler en -	119	Ingeschreven cirkel	57, 69
Hoefmagneet	221	Inhomogeen stelsel	108
Hoek	35, 52, 64	Inhoud	6, 58
-snelheid	6	Integraal	36
-vergroting	194	-rekening	86
-versnelling	6	-stellingen	114
vlakke -	4, 6	-teken	36
Hoff		Integratie	
wet van Van 't -	136	numerieke -	117
Hogere machtsvergelijking	42	Intensiteitsniveau	183
Homogeen stelsel	108	Interferentie	194
Homogene vergelijking	83, 85	Interpolatie	
Hoofdassengedaante	109	lineaire -	116, 117
Hoofdbrandpunten	192	Interval	32
Hoogte	6	Intreeverliezen	156
-lijn	53, 69	Inverse	
Hook		- functie	34, 67
wet van -	179	- matrix	104
Hôpital		- regel	80
regel van l' -	48	Inwendig product	111, 112
Hopkinson		Ionen	245, 251
wet van -	217	- in water	273
Horsepower	18	-sterkte	12
hp	18	Ionisatie-energie	245
Hundredweight	17	Ionisatiepotentiaal	245, 252
Hütte	166	Ionogeen	246
Hydraulische straal	153	Iôta	28
Hydrostatica	127	Irradiantie	13
Hydroxiden	261	Irreversibel proces	138
Hyperbolische functies	50	Isentropisch	139, 148
Hyperboloïde	110	ISO	4
Hyperbool	76	Isobaar	139
orthogonale -	46	Isochoor	139
Hysteresislus	220	Iso-elektrisch punt	250, 274
Hysteresisverliezen	220	Isofonen	185
Hz	5	Isotherm	139, 148
● Icosaëder	61	Isotopen	243
Identiek	31		
Imaginaire deel	36, 49		

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

- j ..... 15
- J ..... 5
- Jaar ..... 15
- Jacobi
  - methode van - ..... 120
- Johnson ..... 166
- Joule ..... 5
  - effect ..... 142
  - Kelvin-effect ..... 142
- Jürgess ..... 167
- k ..... 20
- K ..... 3
- Kappa ..... 28
- Karaat ..... 15
- Karakteristieke impedantie ..... 183
- Karakteristieke vergelijking ..... 85, 107
- Katalysator (chemie) ..... 249
- Ke ..... 187
- Kegel ..... 110
- Kelvin ..... 3
  - beginsel van - ..... 138
- Kerfslagwaarde ..... 8
- Kern lineaire transformatie ..... 106
- Kettingregel ..... 80
- kg ..... 3
- kgf ..... 15
- Kilo ..... 20
- Kilogram ..... 3
- Kilogramkracht ..... 15
- Kilometer per uur ..... 15
- Kilomol ..... 4
- Kilopond ..... 15
- Kilowattuur ..... 15
- Kinematische viscositeit ..... 126
- Kinetische energie ..... 7, 147
- Kirchhoff
  - eerste wet van - ..... 212
  - tweede wet van - ..... 212
  - wet van - (warmtetransport) ..... 169
- Kleiner dan ..... 31
- Kleur(en) ..... 198
  - coëfficiënten (trichromatische -) ..... 199
  - coördinaten ..... 199
  - definitie ..... 198
  - driehoek ..... 199
  - meetkunde ..... 198
  - omslag ..... 266, 271
  - stimuli ..... 198
- km/h ..... 15
- kn ..... 15
- Knikverliezen ..... 157
- Knoop ..... 15
- Knopen ..... 180
- Knudsenstroming ..... 151
- Koken ..... 136
- Kolom-index ..... 103

- Kook
  - lijn ..... 137
  - punt ..... 136
  - puntsverhoging ..... 136, 272
- Koorden ..... 56
- Koordenvierhoek ..... 57, 70
- Koppel ..... 7
  - factor ..... 9, 217
- Kosteneenheid ..... 187
- kp ..... 15
- Kracht(en) ..... 7
- Kringprocessen ..... 140
- Kritisch punt ..... 137
- Kritische stroming ..... 150
- Kruinvorm ..... 161
- Kruipende beweging ..... 158
- Kt ..... 15
- Kubus ..... 60
- Kurkentrekkerregel ..... 111, 214
- Kwadranten ..... 52
- Kwadratisch(e)
  - functie ..... 46
  - oppervlak ..... 109
  - vergelijking ..... 42
  - vorm ..... 109
- kWh ..... 15
- Kwikkolom
  - mm - ..... 15

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

• l.....	3, 15
L.....	15
Lading	
elektrische - .....	202
elementaire - .....	123
volumieke - .....	10
Ladingsdichtheid	
elektrische - .....	9, 10
Lagrange .....	85
interpolatiepolynoom van - .....	117
Lambda .....	28
Lambert.....	15
cosinuswet van - .....	200
Laminaire stroming.....	146
Laplace	
formule van - .....	214
-getransformeerde .....	37, 100
-operator.....	37
-transformaties .....	96
lb .....	17
lbf.....	18
Lekfactor .....	9, 10
Len(s)(zen).....	192
-formule .....	193
-sterkte .....	193
Lengte .....	3, 6
- kromme.....	92
Lhuilier .....	73
Licht.....	13, 187, 196
hoeveelheid - .....	13, 200
-jaar .....	15
-snelheid.....	13, 123, 188
-sterkte .....	4, 13, 200
-stroom.....	13, 200
Limieten.....	34, 48
Lineaire vergelijkingen .....	41, 120
liq pt.....	17
liq qt.....	17
Lissajous figuren.....	176
Liter .....	15
Lm.....	5
Logaritmen.....	34, 39
Briggse - .....	39
natuurlijke - .....	34, 39
Logaritmische	
- as.....	39
- functie .....	47
Longitudinale golf.....	177
Loodrecht.....	34
Lopende golven.....	177
Lorentzkracht .....	216
Luchtkolommen .....	180
Luidheid.....	184
Luidheidsniveau.....	184
Lumen.....	5
Luminantie.....	13, 200
Lux.....	5
lx .....	5
ly .....	15

<b>A</b>	• m .....	3, 20	Meetoverlaten .....	162
<b>B</b>	M .....	20	Mega .....	20
<b>C</b>	Ma .....	145	Menelaos	
<b>D</b>	Mach		stelling van - .....	73
<b>E</b>	-kengetal .....	145	Mengsel .....	131, 135
<b>F</b>	modelregel van - .....	162	Merkwaardige producten .....	40
<b>G</b>	Machtreeksen .....	44	Merkwaardige quotiënten .....	40
<b>H</b>	Maclaurin		Metacentrum .....	129
<b>I</b>	reeks van - .....	45	Meter .....	3
<b>J</b>	Magneetpolen .....	214	mho .....	18
<b>K</b>	Magneten		Mho .....	18
<b>L</b>	permanente - .....	221	mi .....	16
<b>M</b>	Magnetisatie .....	9, 213	Micro .....	20
<b>N</b>	Magnetisch(e)		Micron .....	15
<b>O</b>	- bronspanning .....	9	Microscoop .....	194
<b>P</b>	- energie .....	9	Middelevenredigen .....	44
<b>Q</b>	- flux .....	9	Middellijn .....	56
<b>R</b>	- fluxdichtheid .....	9	Middelwaardstelling .....	90
<b>S</b>	- inductie .....	9	Mijl	
<b>T</b>	- moment .....	9	geografische - .....	15
<b>U</b>	- polarisatie .....	9	Hollandse - .....	15
<b>V</b>	- reluctantie .....	9	mil .....	16, 18
<b>W</b>	- spanning .....	9	Mil .....	16
<b>X</b>	- susceptibiliteit .....	9	Mile	
<b>Y</b>	- vectorpotential .....	9	statute - .....	16
<b>Z</b>	- veldsterkte .....	9	Milli .....	20
	- weerstand .....	9	min .....	15
	dipoolmoment .....	9	Minimum .....	81, 82
	Magnetisme .....	9, 219	Minuut .....	15, 35
	Magneto		Modelregels .....	162
	-motorische kracht .....	10	Modulus .....	32, 49
	-statica .....	213	Moivre	
	Massa .....	3, 7	stelling van De - .....	49
	- wet van Rayleigh .....	185	mol .....	3, 243
	areïeke - .....	7	Molair(e)	
	-balans .....	147	- concentratie .....	12
	-concentratie .....	12	- fractie .....	12
	eenheid (technische -) .....	16	- massa .....	12
	-fractie .....	12	- volume .....	12, 129
	lineïeke - .....	7	-massa .....	129
	molaire - .....	12, 129	Molariteit .....	12, 268
	soortelijke - .....	7	Moleculair(e)	
	-stroom .....	7, 146	- gewicht .....	12
	-stroomdichtheid .....	7	- stroming .....	151
	volumieke - .....	7	- verschijnselen .....	14
	Materie .....	12	Molecuul .....	243
	Matrix .....	103	-concentratie .....	12
	Matrixproduct .....	104	-dichtheid .....	12
	Matrixrekening .....	104	-massa .....	244, 255
	Maximum .....	81, 82	-massa (relatieve -) .....	12
	Maxwell .....	15	Moment .....	7
	betrekkingen van - .....	142	magnetisch - .....	9, 213
	vergelijkingen van - .....	217	statisch - .....	8
	McAdams .....	165	Monochromatisch .....	196
	Mechanica .....	7	Moody-diagram .....	152
	Meegaandheid .....	175	Motorformule .....	215
	Meetflens .....	149	Mu .....	28
	Meetkunde .....	52	μ .....	20
	analytische - .....	74	Mutuele inductie .....	217
	Meetkundige rijen .....	43	Mx .....	15

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

● n	20	Omgeschreven cirkel	56, 68, 69
N	5	Omikron	28
Nabijheidspunt	194	Omkeerbaar proces	138
Nabla		Omslagpotentiaal	271
-operator	114	Omslagtrajecten	266
-vector	37	Omstroming	10
Nagalmtijd	186	Omtrek	58
Nano	20	omw/min	16
Natuurconstanten	123	Omwentelingen per min.	16
Natuurkunde	121	Omwentelingslichaam	63, 93
Natuurlijke		Onafhankelijkheid	
- getallen	33	lineaire -	106
- logaritmen	39	Onbepaalde integraal	86
Nauwkeurigheid	51	Onderdeterminant	105
Neper	5, 123	Oneigenlijke integralen	90
analogieën van -	72	Oneigenlijke macht	38
regel van -	70	Oneindig	33
Neutron(en)	243	Ongelijkheden	38
rustmassa -	123	Ongeordend paar	33
-tal	14	Ooggevoeligheid	196
Newton	5	OP	250
afkoelingswet van	164	Open leidingen	159
afkoelingswet van -	164	Operatietekens	35
binomium van -	40	Oplosbaarheid	260
methode van (-Raphson)	116	Oplosbaarheidsproduct	250, 261
stromingswet van -	158	Oplossingen	135, 267
-vloeistof	126	Oppervlakte	6, 58
n-hoek	55	-middenpunt	63, 93
Niet		moment (kwadratisch -)	8
-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen	85	moment (lineair -)	8
-omkeerbaar proces	138	-spanning	8, 126
-quasistatisch proces	138	-stroombichtheid	10
nit	16	Opstijghoogte in capillair	127
Nit	16	Optica	187
Noise Rating krommen	186	Orde	
Normaalspanning	7	- chemische reactie	250
Norton		- differentiaalvergelijking	82, 86
theorema's van -	212	Ordinaat	52
Np	5	Organische stoffen	257
NR-krommen	186	Orgelpijpen	180
Nu	28, 145	Orthogonaal	103, 105
Nucleonental	14	Otto-proces	141
Nulmatrix	104	Ounce	17
Nulniveaus	124	fluid -	17
Nulpunten		Overgang(s)	
schatting -	116	-elementen	253
Nulvector	110	-energie	11
Numerieke wiskunde	116	Overlaat	160
Nusselt-kengetal	145	Oxalaten	261
		Oxidatie toestanden	251
● oct	16	Oxidator	269
Octaaf	16	oz	17
Octaëder	61		
Oe	16		
Oersted	16		
Ohm	5		
wet van -	205		
Ω	5		
Omega	28		



<b>A</b>	● p .....	16, 20	Poiseuille .....	16
<b>B</b>	P .....	16, 20	Poiseuille-stroom .....	167
<b>C</b>	Pa .....	5	Poisson	
<b>D</b>	Paar .....	33	constante van - .....	179
<b>E</b>	Paardekracht .....	16	-verhouding .....	8
<b>F</b>	Paardekrachttuur .....	16	Polair .....	246
<b>G</b>	Paraboloïde .....	110	Polarisatie	
<b>H</b>	Parabool .....	46, 77	elektrische - .....	203
<b>I</b>	Parallellepipedum .....	60	magnetische - .....	213
<b>J</b>	Parallelogram .....	54, 58	Polytropisch .....	139
<b>K</b>	Parallelschakeling .....	204, 206	Pond .....	16
<b>L</b>	Paramagnetisme .....	219	Poolcoördinaten .....	52
<b>M</b>	Paraxiale lichtstralen .....	192	Potentiaal	
<b>N</b>	Parsec .....	16	chemische - .....	12
<b>O</b>	Particuliere oplossing (PO) .....	82, 84	elektrische - .....	203
<b>P</b>	Partieel (partiële)		-functie .....	8
<b>Q</b>	- afgeleide .....	81	Potentiële	
<b>R</b>	- differentiaalvergelijking (PDV) .....	86	- energie .....	7, 147
<b>S</b>	-breuksplitsing .....	89	Pound .....	17, 18
<b>T</b>	-integreren .....	89	Pound per sq. inch .....	18
<b>U</b>	Pascal .....	5	Poundal .....	18
<b>V</b>	wet van - .....	128	Pr .....	146
<b>W</b>	Pauling .....	251	Prandtl	
<b>X</b>	elektonegativiteiten van - .....	246	-kengetal .....	146
<b>Y</b>	pc .....	16	stuwbuis van - .....	149
<b>Z</b>	Pdl .....	18	Predictor .....	119
	Peck .....	17	Primitieve functie .....	86, 89
	Peltier		Prisma .....	60, 191
	-batterijen .....	225	Prismoïde .....	61
	-coëfficiënt .....	225	Projectiestelling .....	53
	-effect .....	225	Propstroming .....	167
	-elementen .....	225	Proton(en) .....	243
	Periode .....	6	rustmassa - .....	123
	Periodesysteem .....	176	-tal .....	14
	Periodiek systeem .....	245, 253	Pseudo-plastische vloeistof .....	126
	Permeabiliteit .....	10, 123, 220	psi .....	18
	relatieve - .....	10	Psi .....	28
	Permeantie .....	10	pt .....	17
	Permittiviteit .....	9, 10, 123, 202	dry - .....	17
	relatieve - .....	10, 202	Pulsatie .....	6
	Peta .....	20	Puntladingen .....	202
	ph .....	16	Pythagoras	
	Phot .....	16	stelling van - .....	53
	pH-waarde .....	250		
	Pi .....	28		
	pi (getal) .....	37	● qr .....	17
	Pico .....	20	qt .....	17
	Pint .....	17	Quart .....	17
	dry - .....	17	dry - .....	17
	liquid - .....	17	liquid - .....	17
	Piramide .....	60	Quarter .....	17
	Pitotbuis .....	149	Quasistatisch proces .....	138
	pk .....	16, 17		
	pkh .....	16		
	Pl .....	16		
	Plaatscoördinaten .....	113		
	Planck			
	constante van - .....	123		
	wet van - .....	169		
	Pointing vector .....	10, 218		

<b>A</b>	• R.....	16	Resistiviteit .....	10
<b>B</b>	Raaklijnen .....	56	Retroreflectie .....	192
<b>C</b>	Raaklijnvierhoek .....	57, 70	Reversibel proces.....	138
<b>D</b>	Rad (stralingsdosis).....	16	Revolutions per minute .....	18
<b>E</b>	Radiaal .....	4, 35, 64	Reynolds	
<b>F</b>	Radiale symmetrie .....	95	-kengetal .....	146
<b>G</b>	Radiantie .....	13	modelregel van - .....	162
<b>H</b>	Rang.....	103	Rh $\bar{o}$ .....	28
<b>I</b>	Rationale getallen .....	33	Richtingscoëfficiënt.....	74, 78
<b>J</b>	Rayleigh.....	169	Rijen .....	43
<b>K</b>	kengrootheid van - .....	165	Rij-index .....	103
<b>L</b>	massawet van - .....	185	Rijpen .....	137
<b>M</b>	rd.....	16	Ring .....	62
<b>N</b>	.....	16	Ringkern .....	216, 217
<b>O</b>	Re.....	146	Roesten .....	250
<b>P</b>	Reactantie .....	10	Romeinse cijfers .....	27
<b>Q</b>	Reactie		Röntgen.....	16
<b>R</b>	chemische - .....	246	Rotatie.....	37, 113
<b>S</b>	-enthalpie .....	247	Rotatiefrequentie .....	6
<b>T</b>	-evenwicht.....	248	Rotatiestroming .....	151
<b>U</b>	-snelheid.....	249	rpm.....	18
<b>V</b>	-snelheidsconstante .....	249	Ruimte .....	6
<b>W</b>	-vergelijking.....	246	driedimensionale - .....	4
<b>X</b>	Rechte .....	74	-hoek .....	4, 6
<b>Y</b>	Rechte hoek .....	35, 52	lineaire - .....	105
<b>Z</b>	Rechthoek .....	54, 58	Ruit .....	54, 58
	Rechthoekige		Runge-Kutta	
	- boldriehoek .....	70	methode van - .....	119
	- coördinaten .....	52		
	- driehoek .....	53, 58, 68		
	Rechtscyclisch stelsel .....	112		
	Reden .....	43		
	Redoxindicatoren .....	271		
	Redoxpotentialen .....	269		
	Reductieformules .....	66		
	Reductor.....	269		
	Redwood.....	18		
	Reëel (reële)			
	- beeldpunt .....	190		
	- deel .....	36, 49		
	- getallen .....	33		
	Reeksen.....	43		
	Referentieniveau .....	124		
	Reflectie.....	189		
	Reflectiefactor			
	spectrale - .....	13		
	Refractie.....	190		
	Regelmatische zeshoek .....	59		
	Registerton.....	16		
	Regula falsi .....	116		
	Rek			
	relatieve - .....	8		
	Rekenkunde .....	38		
	Rekenkundige rijen.....	43		
	Rekgrens .....	8		
	Reluctantie .....	10, 217		
	Rem.....	16		
	Remanentie .....	220		
	Repetentie .....	6		
	Resistantie.....	10		

● s.....	3	Smeltingswarmte	
S.....	5	soortelijke - .....	136
Sabine		Smoorproef .....	142
wet van - .....	186	Smoren.....	150
Samendrukbaarheid .....	126	Snelheid(s).....	6, 175
Saybolt.....	18	-druk .....	147
sb.....		-potentiaal .....	8
.....	16	Snellius	
Scalair		wet van - .....	190
- product.....	111, 112	Solenoïde .....	216
- tripelproduct .....	112	Somteken .....	32
Schaling .....	99	Soortelijke	
Scheefhoekige		- enthalpie .....	11
- boldriehoek .....	71	- entropie .....	11
- driehoek .....	53, 68	- inwendige energie.....	11
Scheidend vermogen.....	194	- overgangsenergie.....	11
Scheiding van variabelen .....	83	- vrije energie.....	11
Scheikunde.....	242	- vrije enthalpie .....	11
Scherpe hoek.....	52	- warmte .....	11
Schijnvermogen .....	10, 210	- warmteverhouding.....	11
Schillen .....	245	Spanning(s).....	8
Schmidt-grafiek .....	161	coëfficiënt (relatieve -).....	11
Schuif		elektrische -.....	203
-hoek .....	8	magnetische - .....	217
-spanning.....	7	-reeks .....	224
Secans .....	65	-wet .....	212
Seconde (hoek) .....	16, 35	Specifieke activiteit .....	14
Seconde (tijd).....	3	Spiegel .....	189
Sector .....	59	Spiegelbeeldsymmetrie .....	95
Seebeck-effect.....	223	Spiegeling .....	35
Segment .....	59	Spoelen .....	215
Seidel		Spreidingscoëfficiënt .....	10
methode van Gauss-.....	120	St.....	16, 17
Serieschakeling.....	204, 206	Staafmagneet .....	221
Sferische aberratie.....	190	Staande golven.....	180
Sferische wand		Standaard-rij(kolom)vorm .....	103
warmtetransport door - .....	164	Stap-indexvezel .....	196
Sh.....	146	Statisch moment .....	8
Sherwood-kengetal .....	146	Statute mile .....	16
SI (Système International) .....	3	Stefan-Boltzmann	
Siemens.....	5	constante van - .....	123
Sievert.....	5	stralingswet van - .....	169
Sigma .....	28	Ster/driehoek-transformatie .....	211
Significante cijfers .....	51	Steradiaal .....	4
Simpson		Sterkte.....	8
drie-puntsformule van - .....	118	Sterschakeling.....	210
formule van - .....	118	Stewart	
regel van - .....	64	stelling van - .....	53, 72
Singuliere oplossing (SO) .....	82	Stijfheid .....	175
Sinus .....	65	Stilb.....	16
-regel.....	71	Stirling-proces .....	141
-vormige stroom/spanning .....	207	Stof	
Slapheid .....	175	-diffusie.....	173
Slinger.....	176	hoeveelheid - .....	12
Slug.....	17	-overdracht.....	173
Smelt		-transport.....	173
-lijn.....	137	Stokes .....	16
-punt.....	135	stelling van - .....	115
-temperatuur.....	135	wet van - .....	158

A	Stollingswarmte	
	soortelijke - .....	136
B	Stolpunt.....	135
	Stompe hoek .....	52
	Stone .....	17
C	Stoot.....	7
	Straal.....	6, 56
	hydraulische - .....	153
D	Straling(s) .....	196
	-constante .....	123
	-elektromagnetische - .....	13
	-emittantie .....	13
	-energie .....	13
	-energiedichtheid .....	13
	-flux.....	13
	-fluxdichtheid.....	13
	-intensiteit .....	13
H	Strich.....	18
	Stroming(s)	
	- door cilindrische buizen.....	150
	-leer .....	8
	moleculaire - .....	151
	visceuze - .....	151
	Stroom.....	205
	-dichtheid .....	205
	elektrische - .....	3, 10
	-wet .....	212
L	Structuurformule .....	244
	Stuwdruk .....	147
M	Sublimatielijns.....	137
	Sublimatiepunt.....	137
N	Sublimeren.....	136
	Subnormaal .....	75
	Subsoon.....	146
	Substitutiemethode.....	42, 88
P	Sulfaten .....	262
	Sulfiden.....	262
	Superpositie .....	176
Q	Supersoon .....	146
	Supplement .....	52
R	Susceptantie .....	10
	Susceptibiliteit	
	elektrische - .....	203
	magnetische - .....	213
S	Sv .....	5
	Symmetrievormen.....	95
	Symmetrische matrix .....	103
T		
U		
V		
W		
X		
Y		
Z		

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

• t.....	16	Trilling(s).....	174
T.....	5, 20	gedempte - .....	176
Tangens.....	65	-tijd .....	175
Tangensregel.....	68, 71	Tripelpunt .....	137
Tau.....	28	Tristimuluswaarden	
Taylor		spectrale -.....	198
reeks van - .....	45	Turbulente stroming.....	146
Temperatuur.....	133		
- vereffeningscoëfficiënt .....	11	• u.m.-verdeling.....	55
absolute - .....	11, 133	Uitkomstenruimte .....	32
Celsius - .....	133	Uitstroomwet van Torricelli .....	148
Fahrenheit - .....	133	Uittree-energie .....	223
- gradiënt .....	11	Uittreeverliezen .....	156
kritische - .....	137	Uitwendig product .....	111, 112
-schalen .....	133	Uitwijking	
smelt- .....	135	momentele - .....	175
thermodynamische - .....	3, 133	Uitzetting .....	133
Tera.....	20	Uitzettingscoëfficiënt	
Terugkaatsing .....	189	kubieke - .....	11, 133
Tesla.....	5	lineaire - .....	11, 133
tex .....	16	Universele-kwantor.....	37
Tex.....	16	Universum .....	32
Theorema van Norton .....	212	Upsilon .....	28
Theorema van Thévenin .....	212	Uur .....	16
Thermo			
-diffusie-coëfficiënt.....	12		
-dynamica .....	11, 137, 255		
-elektriciteit.....	223		
-element .....	224		
-koppel .....	224		
Thêta .....	28		
Thévenin			
theorema van - .....	212		
Tijd .....	3, 6		
-constante .....	6		
-verschuiving .....	99		
TME.....	16		
ton .....	16		
UK - .....	17		
US - .....	17		
Toroïde.....	216		
Torr .....	16		
Torricelli			
uitstroomwet van - .....	148		
Traagheid(s)			
-moment .....	7		
-straal .....	7		
Tralieconstante.....	196		
Transformatie			
lineaire - .....	106		
Translatie .....	35		
Transmissiefactor			
spectrale - .....	13		
Transport.....	143		
Transversale golf.....	177		
Trapezium.....	54, 58		
-regel .....	64, 118		
Trekspanning .....	8		
Trekvastheid .....	8		
Trigonometrie .....	68		

<b>A</b>	• V .....	5	Viscositeit	
<b>B</b>	Variatie van constanten .....	85	dynamische - .....	8
<b>C</b>	Vaste stof mechanica .....	8	kinematische - .....	8
<b>D</b>	Vat .....	62	verouderde eenheden van - .....	18
<b>E</b>	Vector .....	35, 105, 110	Vlakken .....	58
<b>F</b>	-algebra .....	112	Vlakteladingsdichtheid .....	10
<b>G</b>	-analyse .....	113	Vlieger .....	54
<b>H</b>	Vectorieel		Vliegtuigen .....	159
<b>I</b>	- product .....	111, 112	Vloeistof .....	125
<b>J</b>	- tripelproduct .....	113	-lijn .....	139
<b>K</b>	Veelhoeken .....	55	-mechanica .....	8
<b>L</b>	Veerstijfheid .....	8	Vochtigheid	
<b>M</b>	Veld		absolute - .....	132
<b>N</b>	-sterkte .....	202	relatieve - .....	131
<b>O</b>	-sterkte (elektrische -) .....	9	Volt .....	5
<b>P</b>	-sterkte (magnetische -) .....	9	Volta-spanning .....	223
<b>Q</b>	Venturimeter .....	149	Volume .....	6
<b>R</b>	Verdampingswarmte		kritisch - .....	137
<b>S</b>	soortelijke - .....	136	molair - .....	123, 129
<b>T</b>	Vereniging .....	32	normaal - .....	130
<b>U</b>	Vergelijkingen		soortelijk - .....	7
<b>V</b>	goniometrische - .....	68	-stroom .....	6, 146
<b>W</b>	lineaire - .....	108	-stroom-dichtheid .....	6
<b>X</b>	Vergroting (optica) .....	190, 194	-verandering (relatieve -) .....	8
<b>Y</b>	Verhang .....	153	Voortplantingscoëfficiënt .....	6
<b>Z</b>	Verlichtingssterkte .....	13, 200	Voortplantingssnelheid .....	177
	Verliesfactor .....	10, 156	Voorvoegsels	
	Verlieshoek .....	10	decimale - .....	20
	Vermenigvuldigingsteken .....	32	Vormfactor .....	210
	Vermogen(s)		Vormingsenthalpie .....	247
	akoestisch - .....	14	Vriespunt .....	135
	blind- .....	10, 210	Vriespuntsdaling .....	272
	elektrisch - .....	210	Vrije convectie .....	166
	mechanisch - .....	7	Vrije val	
	-niveau .....	14	- constante (Gravitatieconstante), .....	123
	-niveauverschil .....	124	versnelling van de - .....	6
	reactief - .....	10		
	schijn- .....	210		
	thermisch - .....	11		
	Vernauwingsverliezen .....	157		
	Verschil .....	32		
	Verschuivingssymmetrie .....	95		
	Versnelling .....	6, 175		
	Vervalconstante .....	14		
	Verwijdingsverliezen .....	157		
	Verzadigingsdruk .....	131		
	Verzadigingsinductie .....	220		
	Verzameling .....	31		
	lege - .....	32		
	Verzwakkingscoëfficiënt .....	6		
	spectrale - .....	13		
	Vierhoek .....	54, 58, 59, 70		
	Vierkant .....	54, 58		
	Vierkantsvergelijking .....	42		
	Vierkantsweerstand .....	10		
	Viertaktmotor .....	141		
	Virtueel beeldpunt .....	190		
	Visceuze stroming .....	151		
	Visco-elastische stof .....	126		

A  
B  
C  
D  
E  
F  
G  
H  
I  
J  
K  
L  
M  
N  
O  
P  
Q  
R  
S  
T  
U  
V  
W  
X  
Y  
Z

• W .....	5	Wervel .....	151
Waals constanten		-sterkte .....	8, 151
Van der - .....	131	-stroming .....	151
Wand		Wien .....	169
warmtetransport door - .....	163	verschuivingswet van - .....	169
Wandruwheid .....	152	Wijzer .....	207
Warmte .....	11, 134	Wiskunde .....	29
-capaciteit .....	11, 134	Wisselstromen .....	206
-doorgang .....	168	Witpunt .....	199
-doorgangscoefficiënt .....	11	Wortel .....	34, 38
-geleiding .....	11, 163	Wrijving(s)	
-geleiding (specifieke -) .....	163	-coefficiënt .....	7
-geleidingscoefficient .....	11	-kracht .....	158
hoeveelheid - .....	11	-weerstandscoefficiënt .....	158
-isolatiecoefficient .....	11, 168		
-motor .....	140	• Xi .....	28
-overdrachtscoefficient .....	11		
-penetratie .....	170	• y .....	20
soortelijke - .....	134	Y .....	20
-stroom .....	11	Yard .....	16
-stroomdichtheid .....	11	yd .....	16
-transport .....	163	Yocto .....	20
-verhouding (soortelijke -) .....	135	Yotta .....	20
-weerstand .....	11		
Water		• z .....	20
-kolom (meter -) .....	15	Zacht-ferromagnetische materialen .....	219
Watt .....	5	Zadelpunt .....	82
Wayzinger .....	166	Zeemijl .....	16
Wb .....	5	Zelfinductie .....	10, 216
Weber .....	5	Zepto .....	20
regel van - .....	213	Zêta .....	28
Wederkerige vergelijking .....	43	Zetta .....	20
Weerstand(s)		Z-getransformeerde .....	100
-coefficient .....	8, 152	Z-transformatie .....	99
elektrische - .....	10	Zuur .....	263, 268
-factor voor buizen .....	152	-constante .....	249, 263, 264
-factor voor pijpen .....	8	-indicatoren .....	266
-kracht .....	158	Zwaarte	
magnetische - .....	217	-lijn .....	53, 69
-moment .....	8	-punt .....	63, 93
soortelijke - .....	10	-veldsterkte .....	7
-temperatuurcoefficient .....	11	Zwevingsfrequenties .....	176
Weglengte .....	6		
Werkzaam vermogen .....	210		
elektrisch - .....	10, 210		

# Basiskennis voor technici

*Electronic document designer: Alwin de Bruine*

*Coördinatie: Francisco Tjisse Klasen*

*Uitgever: A. Huson*

© 1999 Koninklijke PBNA bv, Arnhem

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand en/of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

De CR-ROM Basiskennis voor technici is met de grootst mogelijke zorg samengesteld. De uitgever stelt zich echter niet aansprakelijk voor de gevolgen van eventueel voorkomende onjuistheden in de inhoud van deze uitgave.

**Deze CD-ROM is bestemd voor gebruik in een stand alone computer. Voor gebruik in netwerk gelden afwijkende leveringsvoorwaarden. Deze zijn op aanvraag verkrijgbaar. Het is niet toegestaan zonder voorafgaande schriftelijke toestemming deze CD-ROM in een netwerk te gebruiken.**

[Geef uw reactie op deze uitgave](#)

Bezit u een internet aansluiting? Bezoek PBNA op internet!

[PBNA](#)

[PBNA Uitgeverij](#)

[PBNA Opleidingen](#)



Electronic publishing



# Reactie-pagina Basiskennis voor technici

**De redactie van deze Cd-rom is bijzonder geïnteresseerd in uw op- of aanmerkingen betreffende deze uitgave. Zij stelt het zeer op prijs wanneer u onderstaande vragen invult en via fax, post of E-mail aan ons retour zendt.**

Heeft u suggesties voor aanvullingen of wijzigingen?

Welke onderdelen raadpleegt u geregeld?

Welke onderdelen gebruikt u minder vaak?

Wat vindt u van het bedieningsgemak van deze Cd-rom?

Over welke andere onderwerpen zou u graag een Cd-rom zien verschijnen?

Eventuele andere opmerkingen?

Naam:

Functie:

Straat:

Postcode:

Plaats:

Telefoon:

E-mail adres:

**U kunt deze pagina afdrukken en faxen op nummer 026-3843377 of portvrij zenden aan: Koninklijke PBNA bv, afd. Uitgeverij, Antwoordnummer 1500, 6800 WC Arnhem. U kunt de tekst van deze pagina ook kopiëren en plakken in uw mail programma. Mail uw reactie naar: [publishing@pbna.com](mailto:publishing@pbna.com). Vermeldt als subject: 'reactie Basiskennis voor technici'.**

# Internetbronnen:

[Algemeen](#)

[Normen/Standaarden](#)

[Wiskunde](#)

[Natuurkunde](#)

[Natuurkundige publicaties](#)

[Scheikunde](#)

## Algemeen

- [Informatiediensten in Nederland](#) Wegwijzer naar informatiediensten in Nederland, onder meer op het gebied van: onderzoek, onderwijs, automatisering, internet, media en uitgevers.
- [BUBL Information Service](#) Relevante wetenschappelijke internetbronnen.
- [EELS Engineering Electronic Library](#) Technisch-wetenschappelijke internetbronnen. Initiatief van The Swedish University of Technology Libraries
- [EEVL Edinburgh Engineering Virtual Library](#) The UK gateway to engineering information on the Internet
- [EINet Galaxy - Engineering and Technology](#)
- [Engineering Information Inc.](#) Engineering Information Inc. Identifies, organizes and facilitates easy access to the published engineering literature of the world. Brings information globally, to technical professionals, researchers and managers.
- [SciLib](#)

## Normen/Standaarden

- [CENELEC](#) - Comité Européen de Normalisation Electrotechnique
- [CEN](#) - Comité Européen de Normalisation
- [IAEA](#) - International Atomic Energy Agency
- [CIE](#) - International Commission on Illumination
- [UNESCO](#) - United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization
- [OIML](#) - International Organization of Legal Metrology
- [DIN](#) - Deutsches Institut für Normung
- [NNI](#) - Nederlands Normalisatie-Instituut
- [IEC](#) - International Electrotechnical Commission
- [ITU](#) - International Telecommunication Union
- [ISO](#) - International Organization for Standardization
- [ANSI](#) - American National Standards Institute

## Wiskunde

- [MathSearch](#)

## Natuurkunde

- [Stichting voor Fundamenteel Onderzoek der Materie](#) Non-profit organisatie op het terrein van het natuurkundig onderzoek in Nederland. Beleid, organisatiestructuur, onderzoeksterreinen en personeelsinformatie
- [Centre National de la Recherche Scientifique \(CNRS\) \(Frankrijk\)](#)
- [Deutsche Forschungsgemeinschaft \(DFG\) \(Duitsland\)](#)
- [Engineering and Physical Sciences Research Council \(EPSRC\) \(Engeland\)](#)
- [European Science Foundation \(ESF\)](#)
- [Max Planck Gesellschaft \(MPG\) \(Duitsland\)](#)
- [National Science Foundation \(NSF\) \(Amerika\)](#)
- [Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek \(NWO\)](#)
- [Nederlandse Natuurkundige Vereniging \(NNV\)](#)
- [Technologiestichting STW](#)
- [APS American Physical Society](#)
- [CERN European Laboratory for Particle Physics](#)
- [DESY Deutsches Elektronen-Synchrotron](#)
- [EPS European Physical Society](#)
- [ESRF European Synchrotron Radiation Facility](#)
- [IN2P3 \(French\)](#)
- [JET Joint European Torus](#)
- [KFA Jülich](#)
- [The Internet Pilot to Physics](#)

## **Natuurkundige publicaties**

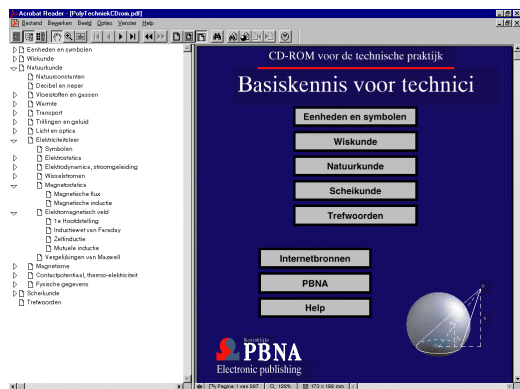
- [\*\*Applied Physics Letters\*\*](#)
- [\*\*Astrophysics Journal online\*\*](#)
- [\*\*CERN\*\*](#)
- [\*\*Elsevier Science \(various journals\)\*\*](#)
- [\*\*Institute of Physics Publishing \(various journals\)\*\*](#)
- [\*\*Los Alamos National Laboratory\*\*](#)
- [\*\*MRS Internet Journal of Nitride Semiconductor Research\*\*](#)
- [\*\*Nature\*\*](#)
- [\*\*Nuclear Physics Electronics\*\*](#)
- [\*\*One-Shot Preprint Search\*\*](#)
- [\*\*Particle Physics\*\*](#)
- [\*\*Science\*\*](#)
- [\*\*Virtual Review\*\*](#)
- [\*\*Zphys-e science\*\*](#)

## Scheikunde

- [CS Chemfinder](#) Gegevens over een verzameling van 75.000 chemische verbindingen
- [NIST Chemistry Webbook](#)
- [On-line chemical catalogues](#)
- [Journal of Corrosion Science and Engineering](#)
- [The most comprehensive collection of chemical and biochemical journals on the World Wide Web](#) Informatie over wat er zoal van diverse chemische tijdschriften (meer dan 500) op WWW te vinden is: compleet online beschikbaar, inhoudsopgave of alleen informatie. Deze site wordt maandelijks bijgewerkt en heeft een e-mail service.
- [Internet journal of chemistry](#)
- [LabGuide](#)
- [IUPAC Nomenclature of Organic Chemistry](#)
- [Chemistry in the News from REUTERS](#) Een service aangeboden door Chemical Abstract Service
- [RIVM publikaties](#) Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu
- [The world of materials](#)
- [Chemical Information Sources from Indiana University/Gary Wiggins](#)
- [Chemistry sources on the Internet/Mark Winter](#)
- [Internet Tools of the Profession, Chapter 5: Chemistry](#)

# Korte gebruikshandleiding Cd-rom Basiskennis voor technici en Acrobat Reader

## Over de Cd-rom Basiskennis voor technici



### • Opbouw scherm

Na het opstarten van het product worden rechts op het beeldscherm de informatiepagina's getoond. Aan de linker zijde van het scherm worden (uitklapbare) bladwijzers weergegeven. De bladwijzers kunt u openklappen door op ► te klikken, u kunt een opengeklapte tak van de bladwijzers sluiten door op ▼ te klikken. Afhankelijk van uw beeldschermresolutie worden pagina's maar gedeeltelijk weergegeven. U kunt de schuifbalk helemaal rechts in het beeldscherm gebruiken om de rest van de pagina te tonen. Ook met de Page Up/Page Down toetsen kunt deze informatie zichtbaar maken.

Bovenaan de pagina bevindt zich de knoppenbalk. Voor een toelichting hierover kunt u de [korte uitleg over Acrobat Reader](#) of de on-line handleidingen van Acrobat Reader raadplegen.

### • Navigeren in het product

U kunt op een aantal verschillende manieren navigeren in het product.

- U kunt bladwijzers uitklappen, en vervolgens op het gewenste onderwerp of hoofdstuk klikken. Op de rechterzijde van het scherm zal de gewenste pagina verschijnen. Met de knop 'naar vorige weergave' komt u weer terug op de oorspronkelijke pagina.
- In het product zijn er verwijzingen, naar andere informatie opgenomen, in de vorm van hyperlinks. Deze zijn herkenbaar aan de blauwe gekleurde tekst. Door hierop te klikken zult u naar de desbetreffende pagina gaan.
- In het product zijn tevens een aantal internet links opgenomen. Deze zijn herkenbaar aan de blauw gekleurde en onderstreepte tekst. Deze links functioneren alleen indien u over een internetverbinding en een browser beschikt. Het is mogelijk dat na verloop van tijd internetpagina's niet meer bereikbaar zijn.
- Via de alfabetisch gerangschikte trefwoordenlijst kunt u naar trefwoorden zoeken. U bereikt deze trefwoorden lijst via de drukknop 'Trefwoorden' op de openingpagina of via de bladwijzer 'trefwoorden'. Op de trefwoordenpagina's staan aan de linkerkzijde de letters A t/m Z. Deze functioneren als links naar de betreffende pagina's. De blauw weergegeven paginanummers achter de trefwoorden zijn links, die brengen u naar de gezochte informatie.
- Alle pagina's in het document zijn genummerd. Onder in het scherm kunt u zien welk paginanummer de huidige pagina heeft.

### • Zoeken naar informatie

- U kunt op twee manieren zoeken naar termen in het product. ([zie toelichting op Acrobat Reader](#)) Met de zoekfunctie 'trefwoord' kunt u op losse woorden zoeken. De zoekfunctie 'geïndexeerde bestanden' biedt meer functionaliteit en is sneller. Hier kunnen jokertekens en de logische operators AND, OR en NOT gebruikt worden. Bovendien kunt u ook zoeken in andere (ook geïndexeerde) PDF-bestanden. U moet dan wel de locatie van het index bestand (\*.pdx) aangeven. De jokertekens, die u kunt gebruiken zijn: '\*' voor één of meer lettertekens en '?' voor één willekeurig teken. Bij het zoeken met AND wordt gezocht naar de twee betreffende termen, die maximaal drie pagina's van elkaar verwijderd mogen zijn. Meer informatie over het zoeken treft u aan onder het Help menu van de Acrobat Reader [Help:Insteekmodules Help:Acrobat Search gebruiken]

### • Printen van pagina's

- Alle pagina's in het document zijn printbaar. De pagina's (A6-formaat) worden gecentreerd afgedrukt op A4. Vergroten naar volledig A4 formaat is niet mogelijk. Op sommige niet-Postscript printers worden de pagina's niet correct afgedrukt. In dit geval kunt u proberen een nieuwere versie van de printerdriver te installeren.

# Korte gebruikshandleiding **Cd-rom Basiskennis voor technici** en Acrobat Reader

## Over Acrobat Reader

### De knoppenbalk



**Weergave: alleen pagina**



**Navigatie: naar vorige weergave**

Gebruik deze knop om terug te keren nadat een link gevolgd is. (meerdere niveaus mogelijk)



**Weergave: pagina en iconen**



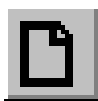
**Navigatie: naar volgende weergave**

Gebruik deze knop na het gebruik van de knop 'naar vorige weergave'.



**Weergave: pagina en bladwijzers**

Gebruik deze instelling voor het weergeven van het Basiskennis voor technici bestand.



**Weergave: ware grootte**



**Gereedschap: handje**, gebruik dit gereedschap om een niet volledig weergegeven pagina te verschuiven.



**Weergave: passend**

Gebruik deze knop om een pagina volledig weer te geven in het venster.



**Weergave: in- en uitzoomen**

N.B. standaard is inzoomen, door de control (Ctrl)toets ingedrukt te houden kunt u uitzoomen



**Weergave: volledige breedte**

Gebruik deze weergavemogelijkheid om de volledige breedte van het venster te benutten.



**Selectie gereedschap voor tekst**



**Zoekfunctie: trefwoord**

opties: heel woord, hoofdlettergevoelig en terugzoeken.



**Navigatie: blader naar eerste pagina**



**Zoekfunctie: geïndexeerde bestanden**

Zoeken mogelijk in andere geïndexeerde PDF-bestanden. Opties: jokertekens, AND, OR en NOT.

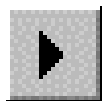


**Navigatie blader naar vorige pagina**



**Zoekfunctie: toon zoekresultaten**

Toont het resultaat na het zoeken in geïndexeerde PDF bestanden.



**Navigatie: blader naar volgende pagina**



**Zoekfunctie: blader terug in zoekresultaten**

Te gebruiken na het zoeken in een geïndexeerd bestand.



**Navigatie: blader naar laatste pagina**



**Zoekfunctie: toon overige zoektreffers**

Te gebruiken na het zoeken in een geïndexeerd bestand. Blader zo snel door alle zoekresultaten.



**Start uw webbrowser**

### Overige aanwijzingen / tips

- U kunt de bladwijzers beter zichtbaar maken door de vensterrand met uw muis te verplaatsen.
- Tekst kunt u m.b.v. het tekstselectiegereedschap selecteren, kopiëren en plakken in uw tekstverwerkingspakket. N.B. een aantal symbolen en lettertekens kunnen anders worden weergegeven. Met de functie 'zoek en vervang' kunt u de tekst herstellen.
- Afbeeldingen kunt u selecteren door in het menu [opties:afbeelding selecteren] te kiezen. Vervolgens kunt u met de muis een kader trekken om de bewuste afbeelding. Kopieer vervolgens de afbeelding naar het klembord. De (bitmap)afbeelding is nu beschikbaar voor andere applicaties.

Voor verdere informatie over het gebruik van Acrobat Reader en Acrobat Search verwijst u naar de Online handleidingen van deze producten. Deze kunt u vinden onder het menu-item Help van de Acrobat Reader.